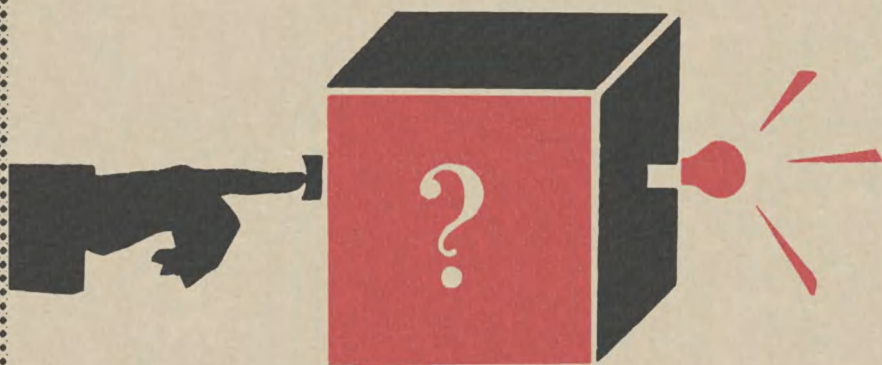


азбука
математической
ЛОГИКИ

Г. П. МЕЛЬНИКОВ



7

НАРОДНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ



ЕСТЕСТВЕННО-
НАУЧНЫЙ
ФАКУЛЬТЕТ

Г. П. МЕЛЬНИКОВ,
кандидат технических наук

А З Б У К А

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ

ЛОГИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗНАНИЕ» Москва 1967



Scan AAW

51
M48

Человек тратит многие годы на учение и повседневную практику, прежде чем его начинают называть настоящим мастером своего дела. И лишь незначительную часть накопленных знаний и опыта удастся ему использовать в новой области, если почему-либо приходится круто изменять специализацию. Причины такого положения достаточно очевидны. Много ли общего, например, в работе электромонтера и учительницы, физиолога и чекиста? Можно ли сопоставить действия математика, слушающего доказательство новой теоремы, и изыскателя, готовящегося к очередному таежному путешествию, работника министерства, читающего сводки с предприятий, и радиотехника, ремонтирующего телевизор?

Тем не менее во всех перечисленных примерах разнообразных видов человеческой деятельности (число таких примеров можно было бы увеличивать до бесконечности) есть существенно общие черты. Эта общность заключается в первую очередь в необходимости увязывать причины со следствиями, воздействия с результатами, одни действия с другими действиями. Человек должен учитывать зависимость поведения одной части сложного объекта от поведения другой его части, выводов от предыдущих утверждений и т. д. Например, электромонтер наименьшим количеством замыканий и размыканий цепи должен установить связь между узлами электрической сети, сравнить существующую схему с той, которая должна быть, и тем самым найти место неисправности. Учительница должна доходчиво и точно объяснить зависимость выбора той или иной формы слова от наличия различных грамматических признаков в другом слове, показать связь порядка слов с местом простого предложения в составе сложного и т. д. Физиолог, фиксируя типы воздействий и характер реакций животного на эти воздействия, в конечном счете получает сведения о рефлексорных цепях и петлях, образуемых нервными волокнами и клетками. Чекист, сопоставляя показания нескольких человек, выявляет, какие показания вытекают из других, какие вступают в противоречие, какие объединяют в единую картину казавшийся несвязанным

набор фактов. Математик следит за тем, действительно ли каждый шаг доказательства новой теоремы не выходит за рамки допустимых комбинаций исходных положений. Изыскатель, вырабатывая план своего путешествия, в первую очередь выявляет по картам и описаниям сеть возможных подходов к намеченным объектам. Радиотехник сравнивает сигналы, поступающие на вход отдельных узлов, с сигналами на их выходе и обнаруживает тем самым неисправности в цепях взаимодействия между радиодеталями телевизора.

Вполне очевидно, что умение четко разделять изучаемый объект на составные части и на связи между ними, умение так или иначе представлять (например, изображать) сеть, схему связей между составными частями, умение выбирать лучший вариант схемы, находить в ней неисправности и т. д. — это и есть то общее, что объединяет все рассмотренные виды деятельности. Тот, кто способен выявить это общее из решений конкретных практических задач, может быстрее ориентироваться при решении новых проблем, непохожих на привычные. Следовательно, такой человек эффективнее использует имеющийся опыт когда приходится менять специализацию, и эффективнее обогащает его. Тем самым человек становится более универсальным и ценным работником.

Очевидно, должны существовать специальные теоретические дисциплины, изучение которых содействует такой универсальности. К числу этих дисциплин и относится математическая логика, с сущностью и основными принципами которой нам предстоит ознакомиться. Для этого в первую очередь потребуется ввести и уточнить ряд несложных, но очень важных понятий (структура, система, модель и т. д.), которые, к сожалению, к настоящему времени терминологически недостаточно оформились, хотя и очень широко используются в научной литературе. После этого мы свяжем введенные и уточненные понятия и термины с некоторыми уже установившимися терминами математики (такими, например, как функция, аргумент). Это позволит полнее сформулировать сущность математической логики и ее отличие от обычных, наиболее известных разделов математики. На примере анализа поведения «черного ящика» будут показаны основные типы логических отношений и изложены важнейшие законы математической логики. Заключительная глава посвящается проблеме связи математической логики и математики с традиционной аристотелевской логикой, а также выяснению того, каковы объективные причины, препятствующие разрешению этой проблемы.

Отсутствие ясности в этом вопросе неблагоприятно сказывается на распространении знаний по математической логике. делает труднодоступными для широких кругов читателей даже популярные книги.

«Азбука математической логики», поскольку в ней большое внимание уделено именно исходным понятиям и их увязыванию со здравым смыслом человека, опирающимся просто на жизненный опыт, а не на какие-либо специальные сведения, должна быть доступна читателю, не имеющему никакой предварительной математической подготовки. Как раз наоборот, знакомство с «Азбукой» должно заметно уменьшить те трудности, с которыми сразу же сталкивается человек, решивший заняться изучением математической логики и открывший первые страницы специальной литературы.

«Азбука» может оказаться небезынтересной и для специалистов-математиков хотя бы потому, что хорошо известные им вещи преподносятся в книге с не совсем обычных методических позиций, а также потому, что в ней последовательно проводится вполне определенная концепция относительно сущности математической логики и математики вообще, тогда как обычно в книгах по математической логике эта концепция остается не сформулированной и весьма расплывчатой. «Азбука» должна также содействовать распространению так называемых точных методов исследования в науках, до недавнего времени считавшихся описательными, фактологическими, но в которых, за счет достаточной полноты уже накопленных сведений, стало возможным обнаружить внутренние взаимосвязи явлений, допускающие математическое описание и, следовательно, более эффективное изучение.

И, наконец, отметим еще одну особенность «Азбуки».

За последнее время все более явно ощущается потребность в создании такой новой науки, как общая теория систем. Однако те пока еще немногочисленные книги, которые задуманы авторами как изложение общей теории систем, фактически оказываются обобщениями лишь в более или менее конкретных областях. Объясняется это, по-видимому, тем, что еще недостаточно уточнено главное понятие новой науки — «система вообще». Поэтому постоянно происходит смешение системы со структурой, структуры с моделью, субстанции с системой, и такое неразличение понятий остается более или менее безобидным лишь до тех пор, пока речь идет о системах какой-либо ограниченной разновидности.

«Азбука», все исходные положения которой основаны на постоянном противопоставлении перечисленных понятий, может рассматриваться и как одна из первых попыток изложения важнейших идей именно о б щ е й теории систем. Поэтому знакомство с «Азбукой» должно быть полезно и для тех, кто задумывается над общественными вопросами, и для тех, кто просто желает знать, может ли он, работая с весьма специфическими системами, воспользоваться опытом, накопленным специалистами, имеющими дело с системами совсем иной природы.

ОБЩИЕ ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

Система, структура, субстанция

Любой предмет, явление, ситуация, в которых можно выделить составные части, мы будем называть сложным объектом. Сложный объект представляет собой нечто самостоятельное, потому что его составные части взаимосвязаны или соотносятся друг с другом. Свойства сложного объекта в большей или меньшей степени зависят от вида, типа этих связей или отношений. Следовательно, одной из характеристик сложного объекта является схема связей или отношений между его составными частями. Эту схему или сеть связей между составными частями сложного объекта будем называть структурой, а сами составные части — элементами рассматриваемого сложного объекта. Если мы установим, что рассматриваемый объект (предмет, существо, ситуация и т. п.) является сложным и убедимся в наличии определенной структуры связей или отношений между его элементами, то такой объект мы будем называть системой.

Элементы конкретной системы, как правило, физически так или иначе ощутимы, во что-то воплощены. Это могут быть и металлические детали станка, и живые люди, между которыми установилась определенная схема отношений, и фразы, так или иначе зависящие друг от друга. Поэтому введем еще одно понятие — субстанция, подразумевая под этим термином все то конкретное физическое, во что воплощены элементы сложного объекта. Следовательно, субстанцией может быть и строительный материал, и живой организм, и цепочка букв на бумаге, и любые другие формы внешнего проявления материальности элементов системы.

Конечно, связи между элементами также могут быть представлены вполне ощутимой субстанцией, например клей, гвозди или шарниры между составными частями механиче-

ской системы. Однако даже в этом случае общее количество субстанции, содержащейся в связях, образующих структуру механического объекта, несравненно меньше количества субстанции, содержащейся в элементах объекта; поэтому нередко с достаточным основанием субстанцией связей можно пренебрегать и анализировать структуру как «чистую схему отношений». В тех же случаях, когда связанность между элементами сложного объекта проявляется лишь косвенно, например в форме симпатий и антипатий между членами человеческого коллектива или в форме подобия некоторых характеристик между числами в какой-либо математической системе, то при всем желании невозможно говорить о субстанции связей, хотя нельзя отрицать наличия определенной схемы отношений между элементами, т. е. наличия структуры рассматриваемого сложного объекта.

При необходимости получения максимально полного представления о конкретном сложном объекте или сложной ситуации нужно иметь как можно больше сведений и о субстанции элементов, и о структуре связей или отношений между ними, и даже о субстанции самой структуры, если она представляет собой, например, сеть механических связей.

Однако в очень большом числе случаев бывает выгодно умышленно ограничить информацию о сложном объекте и считать, что связь и отношение — это одно и то же, что как связь, так и отношение принципиально свободны от субстанции, и поэтому схема отношений или связей, т. е. структура, абсолютно «бестелесна», что она представляет собой сеть (или каркас, или скелет) идеальных, «чистых» отношений. Мало того, часто бывает возможно и даже необходимо пренебречь субстанцией не только связей, но и самих элементов, не учитывать тех индивидуальных свойств, которыми они обладают как некие самостоятельные объекты. При этом возникает невольный вопрос: как различать после этого элементы системы, если они считаются также «бестелесными», лишенными индивидуальности?

Оказывается, что если мы знаем структуру, т. е. идеализированную схему отношений, то различия между соотносящимися элементами, лишенными субстанции, можно выразить в структурных терминах. Например, можно приписать «личные» имена всем элементам системы и тогда характеризовать любой из них указанием на имена тех элементов, с которыми он связан отношениями. Это практически то же самое, что мы делаем, когда характеризуем человека не его личными качествами (молод, образован, хороший спортсмен, знает несколько иностранных языков), а через схему его отношений с другими людьми (например; сосед моей тетушки, мой приятель и при этом брат жены моего начальника). При таком подходе от системы, т. е. от исходного сложного объекта, по-

существу остается лишь абстрактная структурная тень, где даже элементы — всего лишь пучки, узлы, места пересечений отношений; вне системы каждый элемент просто перестает существовать, так как не имеет никаких индивидуальных свойств, кроме тех, которые отражают его место в структуре, т. е. в сети чистых отношений.

Связь структуры с субстанцией

Может показаться, что если вместо изучения свойств конкретной системы, воплощенной в «полнокровную» субстанцию, заняться рассмотрением лишь идеализированной абстрактной структурной схемы этой системы, где даже сами элементы всего лишь «пучки чистых отношений», то мы так далеко уйдем от реальности, что наши выводы о системе, сделанные лишь на основании изучения свойств структуры, не будут представлять практической ценности. Однако на самом деле это далеко не так.

Во-первых, только от структуры объекта зависит очень многое. Вспомним хотя бы, что неисчислимо многообразие свойств органических веществ, в состав которых входит одна и та же субстанция (атомы одних и тех же химических элементов), может быть достигнуто лишь за счет видоизменения схемы связей между этими элементами, т. е. только путем изменения структуры. Во-вторых, именно потому, что при анализе структурных особенностей системы мы отвлекаемся полностью от свойств субстанции, нам удастся обнаружить, что самые различные, внешне непохожие системы в действительности имеют немало общих черт, от которых зависят многие (хотя и не все) существеннейшие свойства этих систем. После этого открывается возможность разработать общие приемы изучения тех свойств систем, которые зависят от структуры взаимоотношения между элементами системы. В-третьих, как это ни парадоксально на первый взгляд, отвлечение от субстантных свойств элементов и связей системы и описание этой системы исключительно в структурных терминах совсем не означает, что мы полностью лишаемся возможности иметь информацию и о субстанции системы. Дело в том, что каждый элемент системы, в свою очередь, может рассматриваться как самостоятельный сложный объект, а поскольку многие его свойства также зависят от присущих ему структурных особенностей, то это значит, что чисто индивидуальные особенности элемента как субстантной самостоятельной единицы также могут быть сформулированы в терминах своеобразия его структуры. Следовательно, методика анализа и описания структур, методика выявления тех свойств системы, которые связаны только с особенностями ее структуры, оказывается

применимой и к описанию особенностей субстанции элементов.

Поэтому при структурном анализе системы открывается возможность избежать полного «обескровливания» индивидуальных субстантных свойств элементов, поскольку и эти свойства при необходимости удастся понять как структурные, усложнив исходную структуру системы отражением «микроструктурных» свойств элементов. В этом смысле методика структурного анализа свойств систем оказывается универсально применимой не только к любому сложному объекту, явлению или ситуации, если между элементами этого объекта существуют некоторые взаимосвязи, но и к анализу субстантных свойств любых элементов, если удастся рассмотреть эти элементы как сложные объекты со своей микроструктурой. Таким образом, трудно переоценить значение тех наук, которые позволяют познать свойства структур и учат приемам сведения конкретных, практически важных задач к задачам исследования структурных свойств объектов. Логика, математика и математическая логика — как раз те науки, с помощью которых разрабатываются методы структурного изучения реальной действительности, и на основе этих методов решаются разнообразнейшие практические задачи, связанные с познанием или с созданием сложных систем. Чтобы понять, в чем выражается своеобразие математической логики по сравнению с другими науками, связанными со структурным изучением объектов, нужно уточнить еще некоторые общие понятия.

Модель, оригинал, структурная модель

Одним из основных понятий современной науки (важность которого осознается все полнее) является понятие модели. Когда архитектор вместо настоящего дома строит его макет, то это уже модель. Если представлен только чертеж дома, то это тоже модель, но в другом исполнении, в другой субстанции. И, наконец, если нет ни макета, ни чертежа дома, а есть только колонки цифр и формул, на основании которых можно судить о важнейших особенностях построенного дома, то и это тоже модель. По отношению ко всем своим моделям реальный дом будет служить оригиналом. В самом общем случае под термином «модель» следует понимать некоторый сложный объект, определенным элементам которого можно поставить в соответствие элементы другого сложного объекта — оригинала; при этом взаимосвязям и отношениям между элементами оригинала соответствуют некоторые взаимосвязи или отношения между определенными элементами модели.

Совершенно ясно, что степень соответствия количества элементов модели количеству элементов оригинала и степень подобия типов структурных схем модели типам структурных схем оригинала может быть различной. Следовательно, можно говорить о том, что одна модель больше соответствует оригиналу, чем другая. В частности, субстанция элементов модели может быть той же, что и субстанция элементов оригинала, но может и не иметь с ней ничего общего. Например, дом может быть кирпичным, а его модель в виде чертежа представлять собой графитный след карандаша на бумаге.

Как мы уже говорили, анализ свойств систем чаще всего целесообразно начинать с анализа структуры этих систем. Следовательно, и на модели можно отразить только структуру, только схему отношений между элементами системы. Такая модель будет называться структурной моделью системы. Поскольку при выявлении структуры системы можно и нужно отвлекаться от свойств субстанции (отразив, если требуется, и субстантные свойства в микроструктурных характеристиках элементов), то структурную модель принципиально можно строить из субстанции, не имеющей ничего общего с субстанцией оригинала. Даже наоборот, отвлечение от свойств субстанции оригинала с помощью структурной модели позволяет полностью сосредоточиться на структурных особенностях оригинала, отраженных в структурной модели, поэтому субстанция структурной модели должна быть такой, чтобы субстантные свойства ее элементов не отвлекали внимание человека от особенностей моделируемой структуры. Следовательно, структурная модель должна быть по возможности ближе к бестелесной, «чистой абстракции» — такой, как чертеж, условные символы, цифры, термины.

В свете ранее сказанного понятно, что математики, логики и математические логики фактически имеют дело лишь со структурными моделями исследуемых объектов, либо исследуют структурные модели «сами по себе», если еще не обнаружены реальные сложные объекты, имеющие те структуры, которые уже теоретически известны математикам или логикам.

Ярусы модели и оригинала, индикатор

Большинство сложных объектов имеют так называемое иерархическое строение. Это значит, что после того, как выявлены элементы системы и установлена структура их отношений, можно перейти к рассмотрению каждого из элементов в отдельности и определить, каков состав «микроэлементов» внутри самих этих элементов и какова структура связи между «микроэлементами», т. е. элементами элементов. Эти эле-

менты элементов мы будем называть элементами второго яруса, а исходные элементы — элементами первого яруса. Соответственно исходная структура должна называться структурой первого яруса, а «микроструктура» элементов первого яруса — структурой второго яруса. Понятно, что реальная система может иметь очень большое число ярусов, однако практически чаще всего необходимо рассматривать лишь часть из них. Нередки и обратные случаи: исследователь желал бы выявить гораздо большее число ярусов, чем это возможно в конкретных условиях.

Если создается модель системы, то она также должна иметь многоярусное, иерархическое строение. Будем считать, что второй ярус глубже первого, третий — глубже второго и т. д. Тогда ясно, что чем глубже модель, т. е. чем больше ярусов оригинала она моделирует, тем ближе свойства модели к свойствам оригинала. Ясно также, что выбор глубины модели определяется конкретными условиями решаемой задачи. В частности, очень часто бывают нужны модели нулевого яруса, т. е. такие, на которых не отражен факт членности системы на составные элементы и, следовательно, не смоделирована структура даже первого яруса.

Можно ли считать такую модель моделью? Можно, если она позволяет судить о том, существует или не существует рассматриваемая система. Например, когда человек покупает билет на самолет, у кассира остается корешок билета. Он служит свидетельством того, что на соответствующем самолете полетит в рейс пассажир. Следовательно, корешок служит моделью такой сложной многоярусной системы, как человек. Модель не отражает никаких субстантных свойств пассажира, а моделирует лишь его наличие. Следовательно, это — модель нулевого яруса. Несмотря на свою примитивность, она необходима на практике, например, для осуществления финансовой отчетности кассира перед бухгалтерией.

Структурной моделью нулевого яруса любой системы, поскольку субстанция системы при этом никак не моделируется, может служить любая доступная субстанция: черточка, точка или «галочка» на бумаге, вспышка сигнальной лампочки, шелчок в репродукторе и т. п. Модели нулевого яруса, как мы увидим дальше, абсолютно необходимы и для того, чтобы выявить структуру на всех ярусах системы. Для этого используются модели нулевого яруса, имеющие так называемую естественную связь с оригиналом. В рассмотренном примере модели нулевого яруса мы имели дело с искусственной связью модели с оригиналом. Выражается эта искусственность в следующем: если контролер пропустит человека в самолет без билета, то работник бухгалтерии не будет этого знать.

Теперь возьмем пример из химии. Подобно тому как работника бухгалтерии интересует вопрос, летел или нет пасса-

жир в самолете; и при этом ему безразлично, каковы индивидуальные свойства пассажира, — химику бывает важно знать, попала или не попала в раствор кислота, причем ему тоже может быть безразлично, какая именно кислота. В подобных случаях химик также прибегает к «контролю»: берет лакмусовую бумажку и смачивает ее в растворе. Если там есть кислота, то бумажка краснеет. Совершенно ясно, что химику легче решить поставленную задачу, чем работнику бухгалтерии в предыдущем примере: лакмусовая бумажка, в силу внутренних, естественных причин, не может не покраснеть, если в растворе есть кислота, и у химика не может возникнуть сомнений в объективности показаний индикатора. А вот работник бухгалтерии такой уверенности не имеет: ведь он может думать, что в самолете пассажиров не прибавилось, так как не прибавилось количества корешков от билетов у кассира, хотя на самом деле контролер мог пропустить кого-то без билетов (представим себе такой маловероятный случай!).

Следовательно, если мы интересуемся сложным объектом, хотим знать его структуру, то прежде всего должны найти средства для определения количества элементов, содержащихся в этом объекте на интересующем нас ярусе, и схему связей, отношений между этими элементами, т. е. структуру исследуемой системы. Эта задача решается тем проще, чем удачнее мы можем подобрать модели нулевого яруса как для элементов системы, так и для связей между ними. Если эти модели будут относиться к классу естественных, то, наблюдая за ними, мы можем быть уверены, что в исследуемом звене системы, действительно, имеется или отсутствует элемент, и связан он или нет с другим элементом системы. Такие естественные модели нулевого яруса, служащие «лакмусовой бумажкой» для установления факта присутствия элемента или же определенной связи (или отношения) в системе, мы будем называть индикаторами элементов (или, соответственно, отношений).

Таким образом, мы видим, что модели нулевого яруса — необходимый инструмент при выявлении структуры любой многоярусной системы. Успех в решении любой сложной задачи, связанной с установлением структуры системы, в первую очередь зависит от того, насколько удачно (интуитивно или из теоретических предпосылок, не важно) выбраны индикаторы. Например, раскрытие сложной структуры рефлекторных реакций животных стало возможным потому, что физиолог И. П. Павлов выбрал очень эффективный индикатор наличия рефлексной связи — знаменитую слюнную железу. Ее поведение естественным образом зависит от наличия или отсутствия условного рефлекса, а наблюдать за поведением железы сравнительно удобно и просто.

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ И СТРУКТУРЫ, СТРУКТУРНЫЕ МЕТОДЫ В НАУКЕ

Состояние индикатора

Существуют такие системы, в которых чрезвычайно легко выделяются и составные элементы, и схемы отношений между ними. Например, когда речь идет о кровном родстве между людьми, то, как правило, не трудно установить, кто кому приходится братом или сестрой, отцом или матерью, двоюродным или троюродным братом и т. д. Поэтому структурные схемы, т. е. структурные модели систем, возникающих в результате кровного родства, люди строят и изучают уже многие тысячи лет. Называются эти структурные модели генеалогическими деревьями, так как очень часто их изображают в виде структурной схемы, напоминающей по форме контуры ветвящегося дерева.

Генеалогическая система, т. е. коллектив людей или животных, связанных кровным родством, — типичный представитель очень специфичной разновидности систем, которые называются дискретными двоичными системами. Предварительно отметим главную особенность дискретных двоичных систем: о каждом ее элементе можно сказать только «да» или «нет», когда спрашивается, находится ли он в непосредственной связи с другим элементом этой системы. Для установления кровной связи в генеалогической системе люди пользуются максимально естественным индикатором нулевого уровня, который мы теперь можем также назвать дискретным двоичным индикатором. Например, сам факт рождения ребенка от данной женщины, т. е. факт появления еще одного человека на свет, однозначно свидетельствует о новом элементе в генеалогической системе и о кровном родстве с тем элементом этой системы, от которого произошел новый элемент, т. е. о кровном родстве с матерью. Следовательно, и элемент и связь в этом случае сами для себя являются дискретными двоичными индикаторами.

С этой точки зрения лакмусовая бумажка в химии хотя и естественным, и дискретным, но более опосредствованным способом отражает наличие кислоты в растворе. Кроме того, она входит в класс индикаторов уже не нулевого уровня, если химика интересует не только наличие или отсутствие кислоты в растворе, но и наличие или отсутствие щелочи, так как щелочь также особым образом изменяет цвет лакмусовой бумажки: бумажка синеет. Следовательно, наблюдая за ней, химик может сказать, есть в растворе кислота или щелочь. Поэтому, описывая поведение лакмусовой бумажки в растворе во всей полноте, мы уже не можем обойтись только двумя словами: «да» и «нет». Нам необходимо

обязательно три слова: реакция «кислотная», «щелочная» или «нейтральная». Таким образом, если использовать все индикаторные возможности, которые присущи лакмусовой бумажке, то она представляет собой дискретный троичный, а не двоичный индикатор наличия выявляемых химических «элементов системы». Структурная модель этой системы, выявленная на основании показаний лакмусовой бумажки, как дискретного троичного индикатора, будет более тонкой и глубокой, чем модель этой же системы, полученная при неполном использовании лакмусовой бумажки в качестве дискретного двоичного индикатора (когда обращается внимание только на факт, краснеет она в растворе или нет).

То число четко различимых показаний, которые дает выбранный нами индикатор, будем называть числом его дискретных состояний. В наших примерах рассмотрены индикаторы с двумя дискретными состояниями, называемые индикаторами нулевого уровня, и индикаторы с тремя дискретными состояниями. Совершенно очевидно, что сколько бы ни было однозначно различимых состояний индикатора, он все равно относится к классу дискретных индикаторов, и структурная модель конкретной системы, выявленная с помощью дискретных индикаторов, тоже будет называться дискретной и иметь ряд специфических черт, общих для всех дискретных моделей.

Мы уже говорили, что математика, логика и математическая логика — это науки о структурных моделях всевозможных систем. Теперь можно уточнить, что логика, математическая логика и некоторые разделы математики (например, арифметика) имеют дело исключительно с дискретными структурными моделями, тогда как такие математические дисциплины, как, например, интегральное и дифференциальное исчисление, моделируют недискретные структуры. Кроме того, в логике и математической логике наиболее глубоко разработаны разделы моделирования структур с двузначными дискретными отношениями, т. е. такие структурные модели, которые выявлены с помощью дискретных индикаторов с двумя состояниями (индикаторов нулевого уровня). В дальнейшем мы еще вернемся к вопросу о различии между логикой и математикой и уточним понятие состояния, пока же вполне можно удовлетвориться приведенными определениями.

Субъективные индикаторы при дискретном моделировании

Следует особо остановиться еще на вопросе соотношения между системой и ее дискретной структурной моделью. Дискретность модели кровных родственных отношений, представленной в виде генеалогического дерева, больше всего соот-

ветствует «духу» этих отношений в моделируемой генеалогической системе, т. е. «духу» оригинала. Ведь если пренебречь различиями людей по их полу, то все кровные отношения сводятся к единственному и неизменному типу отношения: данный человек является или не является ребенком другого человека. Все остальные разновидности кровного родства — лишь различные комбинации, различные структурные варианты сетей, элементы которых связаны этим единственным дискретным видом отношения. Причем эти структурные характеристики в системе настолько существенны, что с их помощью удастся определить и некоторые субстантные особенности системы. Например, глядя только на генеалогическое дерево — структурную модель родства, мы в подавляющем большинстве случаев не ошибемся, если скажем, что ребенок скорее похож на своих родителей, чем на свою троюродную племянницу.

А теперь представим себе такую ситуацию. Пусть перед нами та же генеалогическая система, для которой было построено дерево. Элементами этой системы остаются те же родственники, которые были отражены на генеалогическом дереве. Но нас интересует не структура кровных связей, а структура взаимных симпатий между элементами. Сразу же возникает вопрос, как выявить эти симпатии. Кроме того, если для установления кровного родства достаточно было пользоваться единственным дискретным двоичным типом отношения — быть ребенком такого-то родителя, а все остальные отношения вытекали из него как производные, то при установлении схемы взаимных симпатий нужно предварительно решить, сколько градаций симпатий между двумя элементами следует выделить. Например, можно воспользоваться привычной пятибалльной системой. Ведь чем больше градаций, тем точнее, казалось бы, картина. Но это не совсем так, если нет хороших способов «объективной оценки». Кроме того, даже при выбранном числе градаций можно воспользоваться ими также по-разному. Например, оценивать баллом 5 максимум симпатии, а баллом 1 — ее полное отсутствие. Но отсутствие симпатии может означать либо безразличие, либо антипатию.

В первом случае оценка 2 соответствует очень незначительному проявлению симпатии; 3 — несколько большей степени симпатии, а во втором 2 соответствует слабому проявлению антипатии, 3 — полному безразличию, и лишь 4 — слабому проявлению симпатии. Таким образом, мы видим, что в терминах пятибалльной системы, т. е. пятизначных дискретных отношений, может быть несколько вариантов выявления структурных характеристик элементов системы, несколько «интерпретаций» структуры симпатий между элементами. Выбор того или иного варианта оказывается более произ-

вольным, условным, чем при установлении структуры родства. Объясняется это не слабостью методики установления структурной схемы, а плохим соответствием между дискретным, неизменным характером выбранных структурных моделей и неустойчивостью, капризностью, многоаспектностью тех отношений в системе, которые мы упрощенно назвали словом «симпатия» и пытаемся отразить в жестких рамках дискретной модели.

Следовательно, моделирование одних сторон системы, таких, как схема кровного родства, с помощью дискретных моделей дает богатый и очень точный материал для познания интересующих исследователя свойств системы; в то же время аналогичное моделирование других отношений, хотя и может быть представлено в виде дискретных и потому достаточно «точных» моделей, позволяет сделать о структурных свойствах системы лишь очень приблизительные качественные выводы. Поэтому нужно всегда обращать внимание на то, сколь велико принципиальное соответствие между дискретной моделью и свойствами моделируемых отношений системы, и лишь после этого оценивать качество и достоверность результатов, полученных с помощью дискретной модели. К сожалению, об этой чрезвычайно важной стороне дела нередко забывают, особенно когда при выявлении схемы отношений используются приемы, создающие видимость точности, т. е. маскирующие неточность, малую степень соответствия методики исследуемому сложному объекту.

Рассмотрим примеры фактической неточности при кажущейся точности на той же генеалогической системе, в которой выявляется схема симпатий.

Объективные индикаторы при дискретном моделировании

Упростим задачу, и все градации симпатий и антипатий сведем к двум: «симпатичен — несимпатичен». Предположим также, что у исследователя были довольно благоприятные условия работы: со всеми «генеалогическими элементами», структура симпатий между которыми выявляется, он имел возможность беседовать лично. Каждый из них отвечал «да» или «нет» на вопрос, симпатичен ли ему тот или иной из родственников. На основании этих ответов нетрудно было построить дискретную двоичную структурную модель симпатий.

Можно предположить, что рассмотренная методика не совсем объективна, хотя бы потому, что оценка «да» или «нет» в какой-то мере зависела, например, от того, каким было настроение опрашиваемого в день разговора. Поэтому исследователь решил усовершенствовать методику. Для определения факта наличия симпатии он воспользовался такой

единицей, как «акт внимания», под которым понимается любое поздравление одного родственника другим по случаю каких-либо знаменательных дат. Эта единица оказалась удобным индикатором потому, что фамильной чертой всех членов генеалогической системы была пунктуальность, и все акты внимания обязательно фиксировались в специальных тетрадах, причем эти документы были любезно предоставлены исследователю. Воспользовавшись ими, исследователь определил среднее (по системе) число актов внимания со стороны одного родственника к другому за год, после чего оценивать симпатию стало очень просто.

Если среднее годовое число актов внимания (например, брата к сестре) оказывалось не ниже среднего по системе, то ставилась оценка 1 (симпатия), если ниже, то оценка 0 (антипатия). Так оказалось возможным найти для выявления симпатии индикатор нулевого уровня.

Казалось бы, теперь мы имеем дело с идеальной дискретной системой. Исследователь оперирует только цифрами, получая совершенно объективно, независимо от настроения родственников или от погоды, с помощью индикатора, ответ «да» или «нет» на вопрос о наличии исследуемого отношения. Он вправе, опираясь на полученную таким способом дискретную модель, изучать интересующие его свойства исследуемой системы. Большая объективность исследования с помощью нового индикатора достигается благодаря усреднению числа актов внимания за длительное время. Таким способом удаётся взаимно компенсировать те отклонения от «среднего уровня симпатии», которые могут быть вызваны случайными факторами — вроде колебаний настроения. И тем не менее, нет никаких оснований слишком полагаться на дискретность системы, отраженной на этой модели. Ведь на среднем числе актов внимания могли сказаться — и в гораздо большей степени, чем погода или настроение в момент устного опроса — такие факторы, как различие родственников в загруженности работой, в искренности, в расположении к лести, в материальной зависимости одного родственника от другого.

Поэтому нужно быть очень осторожным, чтобы не соблазниться принять сравнительно легко и «объективно» получаемую дискретную структурную модель подобной системы за столь же объективное отражение структурных особенностей системы. Нужно уметь различать, когда точно описываемые свойства дискретной модели одновременно служат достаточно точным отражением структуры самой системы, а когда эта точная дискретная модель может рассматриваться лишь как очень упрощенное и поэтому весьма и весьма приблизительное отражение исследуемых структурных свойств модели.

К сожалению, в настоящее время, когда осознанное структурное моделирование систем все шире распространяется при

решении новых практических задач, есть исследователи, удовлетворяющиеся выбором дискретного индикатора лишь на том основании, что с его помощью сравнительно просто удается выявить дискретную структуру системы; при этом они не замечают, что полученные таким способом структурные модели могут не соответствовать недискретному духу моделируемых отношений и поэтому должны оцениваться лишь как грубое приближение к структуре исследуемых отношений, а не как ее достаточно точное отражение. Но в то же время, если дискретная модель отражает дискретную природу системных отношений, то свойства дискретной структурной модели и структурные свойства системы-оригинала весьма близки, что и дает право пользоваться анализом структурной модели для выявления многих существенных свойств оригинала.

Прикладная логика и математическая логика проявляют свои преимущества как орудие познания сложных систем именно в тех случаях, когда они применяются для изучения объектов, которые с достаточным основанием можно считать дискретными по природе, а не потому лишь, что за счет манипулирования с выбором индикатора удалось создать видимость дискретности.

Теоретическая математическая (и формальная) логика, исследуя сами идеализированные структурные дискретные модели и их свойства, выискивая способы построения и описания все более сложных структур, временно отрываются от «оригиналов», но лишь для того, чтобы, когда на практике встретится новая сложная система, для анализа ее структуры были уже готовы наиболее эффективные способы дискретного моделирования.

Типы решаемых структурных задач

В заключение этого раздела перечислим основные типы задач, связанных со структурным моделированием.

Выявление и описание структуры. Поскольку структура любой системы является одной из ее важнейших характеристик, то просто полное и объективное описание системы предполагает, в частности, по возможности точное описание ее структуры. Но для того, чтобы только описать структуру, ее нужно предварительно выявить. Для выявления структуры системы, как мы уже видели, желательно найти наиболее естественный индикатор. Если он удачно найден, то само описание структуры, т. е. по существу уже построение структурной модели описываемой системы, может осуществляться различными способами. Вопросы о возможных способах описания мы в дальнейшем еще коснемся, сейчас лишь подчеркнем, что выявление и описание структуры кон-

кретной системы — одна из типичнейших прикладных задач, связанных со структурным моделированием.

Анализ структуры. После того как выявлена и описана структура исследуемой системы, т. е. представлена в том или ином виде структурная модель системы, можно начать следующий этап структурного моделирования — анализ структуры системы, сосредоточив временно все внимание на структурной модели. Поскольку структурная модель не затемнена субстантными особенностями элементов, то структурные свойства каждого из них на модели проявляются наиболее выпукло, благодаря чему только из анализа модели удастся выявить те свойства системы, которые могли остаться незамеченными при непосредственном изучении оригинала. Так, анализ структуры системы через анализ ее структурной модели позволяет повысить эффективность исследования оригинала. Особенно благоприятны обстоятельства, когда аналогичная структурная модель уже была исследована ранее. Таким образом, при помощи структурного анализа удастся полнее воспользоваться научным опытом, накопленным при анализе систем, внешне будто бы совсем не похожих на исследуемую.

Синтез структуры. Существует немало типов систем, общие свойства которых прежде всего зависят от особенности их структуры. Если бывает нужно создавать такие системы искусственно (например, выбирать наиболее рациональную схему автомобильного сообщения при проектировании нового промышленного и жилого объекта), то выгодно сначала остановиться на нескольких структурных моделях предполагаемой системы, рассмотреть и исследовать эти модели и выбрать из них такой вариант, который гарантирует наилучшие свойства проектируемой системы. Иными словами, по заданным свойствам будущей системы приходится создавать наилучший вариант ее структурной модели. Этот тип структурного моделирования будем называть синтезом структуры. Совершенно ясно, что, хотя синтез структуры проектируемой системы в некотором смысле противоположен выявлению структуры существующей системы, проводить синтез, не имея достаточного опыта анализа структур, невозможно.

Анализ структуры через ее синтез. И, наконец, широко используется на практике (например, при научном познании сложных реальных систем) такой способ структурного моделирования, который, по существу, объединяет в себе все предыдущие. Этот способ можно назвать анализом через синтез. Заключается он в следующем. После предварительного изучения сложного объекта, воспользовавшись индикаторами, о которых еще нельзя сказать с уверенностью, что они наиболее подходящи для данной задачи, ученый выявляет структуру объекта, составляет тот или иной вариант

описания выявленной структуры и рассматривает это описание как предварительную структурную модель системы. После этого он приступает к анализу структурной модели.

Первый этап анализа — определить, сколь велико количество различных структурных моделей, одинаково хорошо соответствующих имеющимся предварительным сведениям о структуре системы. Если найдено, т. е. синтезировано несколько подобных вариантов, то следующий этап анализа заключается в выявлении свойств системы, не замеченных при ее предварительном исследовании, но вытекающих из особенностей каждого из вариантов ее структурной модели. Когда выявлены эти предполагаемые свойства, исследователь проверяет непосредственно исходную систему, выясняя, какими из свойств, предсказанных с помощью структурных моделей, эта система действительно обладает. Тот вариант модели, который предсказывает большее количество свойств, не замеченных на первом этапе, является лучшей структурной моделью.

Более глубокий анализ этой модели подсказывает пути усовершенствования методики исследования свойств системы. Те свойства, которые необъяснимы в рамках имеющейся структурной модели, требуют синтеза нескольких видоизмененных и усложненных структурных моделей второго цикла исследования. Анализ этих вариантов, проверка выводов на поведении оригинала (т. е. исходной системы) и выбор среди этих вариантов такого, который лучше других предсказывает более тонкие свойства системы, — это следующий цикл изучения системы. Каждый новый вариант структурной модели, полученный на очередном цикле, увеличивает гарантию, что истинная структура исследуемых отношений в системе и ее структурная модель достаточно близки друг к другу. Так анализируется структура системы — благодаря постоянному синтезированию и отбраковке структурных моделей — и синтезируется ее окончательная структурная модель путем постоянного анализа как свойств предполагаемых структур, так и свойств системы, предсказываемых с помощью промежуточных структурных моделей. Очевидно, что аналогичные процедуры могут использоваться при разработке реальной системы, если заданы свойства, которыми она должна обладать.

Объект и предмет науки

Все перечисленные виды структурного моделирования, по существу, являются универсальными методами научного познания непосредственно исследуемой внешней действительности. Если включить сюда и просто анализ структурных моделей, для которых еще не найден оригинал, то тем самым бу-

дуг охарактеризованы и так называемые «чистые», неприкладные (на данном этапе) науки.

Введенные нами понятия системы, структуры, субстанции и модели позволяют легко сформулировать сущность таких общеприкладных и общелогических терминов, как предмет науки и объект науки. Наука становится самостоятельной теоретической дисциплиной, когда ясно очерчиваются границы тех типов реальных систем, воплощенных в конкретную субстанцию, для которых разработана специфическая методика построения структурных моделей, допускающих различные виды структурного моделирования. Этот круг реальных систем (ее оригиналы) составляет объект данной науки, а те структурные модели, которыми она оперирует, — предмет этой науки¹. Сведения, получаемые при непосредственном наблюдении или измерении характеристик системы, относятся к уровню наблюдения, а унифицированные структурные компоненты и их комбинации, используемые для построения структурной модели наблюдаемой системы — к уровню конструкторов.

Чем очевиднее связь между системой и ее структурной моделью, тем наука конкретнее. Например, очень конкретна стереохимия, хотя она имеет дело с чисто «бестелесными» геометрическими пространственными моделями. Математика же наоборот, очень абстрактна, так как связь ее объекта (структуры отношений элементов самых разнообразных систем) с предметом (конструктами, т. е. унифицированными структурными моделями, изображенными условными математическими символами) наименее очевидна. Чем абстрактнее наука, тем шире область ее применения, тем в большей мере она может сосредоточить внимание на своем предмете, т. е. только на структурных моделях, предоставив заботу об увязывании своих конструкторов с конкретными системами другим, «прикладным» наукам.

Особенность логики и математической логики, с этой точки зрения может быть уточнена следующим образом. На уровне наблюдения был найден круг систем, представляющих собой лишь небольшую и довольно случайную часть систем, могущих составить объект самостоятельной науки. На этом ограниченном объекте ученые создали свой предмет — набор конструкторов для моделирования дискретных двоичных структурных отношений, которые вскоре оказались в центре внимания логиков; после этого и логика и математическая логика развивались в основном как «чистые» науки, без своего субстантного объекта. И лишь в последние десятилетия обна-

¹ К сожалению, значения терминов «объект» и «предмет» настолько близки, что нельзя указать убедительных причин, почему одно из них мы должны связывать с понятием оригинала, а другое — с понятием модели.

ружилось, сколь велик истинный круг реальных систем, являющихся объектом логики и математической логики, и как полезны для анализа и синтеза реальных, воплощенных в субстанцию систем те «бестелесные» конструкты — дискретные модели, которые уже давно были разработаны «чистыми» логиками и математиками. К сожалению, отсутствие четкого разграничения между структурой и субстанцией, системой и структурой, системой и моделью и, следовательно, между уровнем конструктов и уровнем наблюдения приводит к ряду недоразумений, которые тормозят распространение знаний математической логики, хотя потребность в использовании этих знаний практически очень велика.

Данная книга должна не только и не столько дать практические сведения по математической логике, сколько помочь связать основные ее понятия с важнейшими общими научными понятиями, уже рассмотренными выше. Такой путь открывает возможность воспользоваться максимумом жизненного опыта, имеющегося у каждого человека, для творческого освоения главных положений математической логики, и избавляет от необходимости тупого зазубривания исходных аксиом и простейших теорем, так как они становятся естественными и самоочевидными. После этого исчезает мистическая «парадоксальность» и «абсолютная произвольность» отношений, которыми приходится оперировать в математической логике и которые якобы противоречат здравому смыслу. Сами знания этих отношений и теорем перестают быть пассивным теоретическим грузом (и лишь в лучшем случае — фундаментом для дальнейшего развития «чистой науки»). Человек получает способность узнавать эти отношения в самых различных «субстанционных одеждах» и использовать свое умение моделировать эти отношения при решении разнообразных практических задач. В частности, знакомство с «Азбукой» должно значительно облегчить решение такой практической задачи, как изучение специальных книг по математической логике.

ВОЗДЕЙСТВИЕ, РЕЗУЛЬТАТ, ФУНКЦИЯ

Воздействие и результат как элементы второго яруса системы

Из всего, что было сказано о математической логике как науке о дискретном моделировании дискретных «по природе» (т. е. с точки зрения свойств, наиболее важных, существенных в некоторой конкретной ситуации) систем, становится ясным, какой должна быть в основных чертах предпочтительная методика изложения ее конструктов, т. е. исходных понятий, относящихся к предмету математической логики. Жела-

тельно изложить эти понятия на примере практического выявления структуры в таких объектах, реальность которых (на уровне наблюдения) нетрудно представить. Это значит, что такой объект, с одной стороны, должен быть достаточно конкретным, а не восприниматься как некая «чистая абстракция». Но, с другой стороны, он, несмотря на свою конкретность, должен обладать значительной степенью общности; лишь при этом условии знакомство со структурными особенностями такого объекта позволит выработать навыки выявления структуры других объектов, независимо от того, в какую субстанцию они воплощены. Ясно, что таким противоречивым требованиям, как конкретность при максимальной общности, не могут отвечать многие типы объектов. Но хотя бы один из таких типов может быть найден. Остановимся на нем достаточно подробно.

В самом начале, вводя понятия сложного объекта и системы (которые рассматриваются нами как тождественные), а также понятие ярусов системы, мы говорили, что элементами этих объектов или систем могут быть и предметы, и существа, и явления, и процессы. Поэтому мы можем рассмотреть и такую систему, на элементы которой оказывается определенное воздействие, приводящее к некоторым результатам, проявляющимся на элементах рассматриваемой системы; если эти воздействия и результаты проявляют себя на элементах первого яруса, то мы вправе считать эти воздействия и результаты элементами элементов системы первого яруса, т. е. элементами второго яруса этой системы.

Если мы имеем возможность создавать эти воздействия или хотя бы, когда это понадобится, давать точный ответ, оказывается воздействие на элемент первого яруса или не оказывается, а также умеем обнаруживать результат на элементах первого яруса, то тем самым мы обладаем способностью получать определенные сведения о свойствах второго яруса системы. Эти сведения, когда они сравнительно легко поддаются наблюдению и учету, служат основным средством выявления элементов и структуры на исходном, первом ярусе системы.

Так, если результаты проявляются на том же элементе первого яруса, на который направлено воздействие, то при такой ситуации элемент «выдает себя» этим результатом, служит сам для себя индикатором. Однако в подобном случае мы можем еще не получить никакого представления о структуре отношений элементов первого яруса. Например, когда при обыске квартиры революционера полицейский выстукивает стены в поисках тайников запрещенной литературы, то удары в стену являются воздействием, а изменение тона звучания, получающегося при этих ударах, позволяет обнаружить искомые «элементы» — скрытые в стене пустоты, слу-

жащие тайниками. Следовательно, в этом случае тайники сами испытывают воздействие, сами проявляют специфическую реакцию на воздействие и могут быть благодаря этому обнаружены. Однако если есть взаимосвязь между тайниками, сеть отношений между ними, т. е. структура системы тайников, то на таком этапе анализа она может оставаться неизвестной. Поэтому, после того как выявлены сами элементы первого яруса, желательно найти такой тип воздействия на них, который позволит вскрыть взаимосвязь между этими элементами, т. е. выявить структуру отношений первого яруса системы.

Эта задача решается наиболее успешно в том случае, если мы смогли заметить, что, оказывая определенное воздействие на один из элементов системы, мы вызываем некоторые изменения не в том же, а в другом элементе этой системы. Обнаружив такое положение, мы с уверенностью можем заключить, что между элементом, на который оказано воздействие, и элементом, на котором проявился результат, существует взаимосвязь, взаимозависимость, т. е. некоторое отношение. Следовательно, подобная зависимость между воздействием и результатом служит индикатором системных отношений.

Для иллюстрации подобного положения вспомним один эпизод из «Анны Карениной». На манеже во время скачек Вронский «испытал воздействие»: упал вместе с лошастью, почувствовал удар, потерпел поражение в состязаниях и т. д. Но результаты этого воздействия проявились на другом «элементе» системы героев романа — Анне, которая побледнела, вскрикнула, а потом разрыдалась. После этого еще скрываемые отношения между Анной и Вронским стали явными для всех, кто наблюдал эту сцену.

Обобщение понятий «состояние» и «моделирование»

Когда мы рассматривали различные типы индикаторов, то оказалось удобным разделить индикаторы на искусственные и естественные и ввести понятие состояний, под которыми понимались все те наблюдаемые изменения в индикаторе, на основании которых удается сделать заключение о наличии «индицируемого» объекта. Следовательно, когда мы говорим, что на элементах системы проявляются результаты воздействий и по этим результатам судим о наличии элементов или отношений в системе, то это значит, что вся процедура воздействий на систему и наблюдения результатов также есть процедура индикации (причем естественной индикации), а проявление результатов воздействия на элементах — это изменение состояний элементов системы. Это понятие целесообразно несколько расширить и считать, что в зависимости от того, испытывает элемент то или иное воздействие или не испытывает, он также находится в различных состояниях.

Поскольку состояния элементов прямо и непосредственно связаны с воздействиями и результатами, то состояние, так же как воздействия и результаты, мы можем рассматривать в качестве элементов второго яруса по отношению к элементам исходной системы. Различия между этими разновидностями «микроэлементов», т. е. элементов второго яруса, выражаются лишь в том, что состояния являются как бы универсальными «микроэлементами» всех элементов первого яруса, тогда как другой тип «микроэлементов» представлен двумя «подтипами» («воздействиями» и «результатами»), различающимися в зависимости от того, какой из элементов первого яруса рассматривается. В то же время, если на одни элементы системы оказывается воздействие, а на других проявляются результаты, то мы имеем право, воспользовавшись введенным ранее понятием модели, расценить факт зависимости состояний одних элементов системы от состояний других ее элементов как процесс моделирования. Такой взгляд вполне оправдан, так как по состоянию элементов, отражающих результаты воздействия, можно с большей или меньшей точностью судить о состоянии элементов, испытывающих воздействия. А так как степень соответствия между этими состояниями (которые можно назвать моделирующими и моделируемыми) зависит от конкретной структуры связи или отношений между элементами (которые также удобно называть моделирующими и моделируемыми), то по характеру наблюдаемого типа моделирования удастся выявить многие особенности структуры первого яруса.

Итак, введя дополнительные понятия воздействия и результата и используя введенные ранее понятия состояния и модели, мы смогли в общих чертах изложить методику поиска естественных индикаторов для выявления состава элементов первого яруса системы и установления структуры отношений между этими элементами. Более детально процедура выявления структуры будет рассмотрена на конкретных примерах, а пока воспользуемся введенными понятиями для формулировки сущности еще одного важного понятия — функции. После этого будет сравнительно просто и более строго, чем мы это уже предварительно делали, показать, в чем заключается различие между математической логикой и «обычной математикой».

Функция, аргумент, значение переменных

Представим себе один из простейших вариантов системы, в которой общая картина состояний нескольких моделируемых элементов отражается в состояниях одного моделирующего элемента. Это значит, как мы уже отмечали, что между самими состояниями есть определенные отношения — определенная структура связей. Эту структуру, проявляющуюся

непосредственно на уровне наблюдения, т. е. в системе, назовем функциональной зависимостью, функциональной связью. Тогда элемент, состояния которого моделируют состояния других элементов системы, должен называться функцией. Элементы, состояния которых моделируются функцией, называют обычно аргументами этой функции или независимыми переменными, а сама функция в этом случае рассматривается как зависимая переменная. Состояния рассматриваемых элементов называют значениями и переменных. По количеству аргументов, т. е. независимых переменных, изменения значений которых влияют на значения функции, ее называют функцией одной, двух и т. д. переменных. Пользуясь понятием модели, определение функции можно сформулировать и следующим образом: функция — это представленная состояниями данного элемента модель состояний других элементов системы, а функциональная зависимость — это структура отношений между элементами такой модели и элементами ее оригинала (принадлежащих, как уже указывалось, второму, более глубокому ярусу, чем элементы исходной системы).

Так мы определили функцию в системе, т. е. на уровне наблюдения. Структурная модель функционального отношения, т. е. функциональное отношение как конструкт, представляет собой сущность математического понятия функционального отношения. (В принципе полезно было бы иметь различные названия для функциональных цепей на уровнях наблюдения и конструктов. Например, противопоставлять структурную цепь функциональной цепи).

Опираясь на определение функции, можно охарактеризовать различия между основными классами функций. Мы остановимся только на некоторых из этих классов. Например, функции можно разделить на однородные и неоднородные. Если функциональная зависимость наблюдается нами на какой-либо реальной системе, то однородность функции выражается в том, что моделируемые и моделирующие состояния физически представляют собой одни и те же явления. Например, воздействуя на определенные элементы системы электрическим напряжением, мы получаем на моделирующем элементе результаты этого воздействия тоже в виде электрического напряжения. Если же результаты проявляются в другой физической субстанции, например в виде изменения свечения электрической лампочки, то мы имеем дело с неоднородной функцией. Следовательно, говоря об однородности, мы подразумеваем однородность субстанции состояний функции по отношению к субстанции состояний ее аргумента в рассматриваемой системе. А на вопросе об однородности функции, представленной в структурной модели исследуемой системы (т. е. на уровне конструктов), следует остановиться особо.

Функциональная цепь в системе и в модели; математическая логика

Аргумент, функциональная зависимость и функция настолько тесно взаимосвязаны, что нередко бывает необходимо рассматривать их как самостоятельное единство. Для этого единства введем особое название — функциональная цепь. Состояния одного крайнего элемента функциональной цепи моделируют состояние другого крайнего элемента. Но если функциональная цепь проявляется в какой-либо конкретной системе, то, как и сама система, она, в свою очередь, также может быть отражена на модели. Если это структурная модель, то поскольку функция — понятие чисто структурное, функциональная цепь может быть без всяких огрублений отражена на структурной модели. Однако, иногда некоторое несоответствие между структурной цепью и ее конструктом может быть внесено умышленно. В частности, несоответствие может заключаться в том, что функциональная цепь в системе-оригинале и функциональная цепь как конструкт отличаются по признаку однородности. Так, если для нас не существенно, различаются или не различаются субстанционно состояния аргумента и функции в оригинале, то на модели это различие, если оно имеется, целесообразней не отражать и представить ее однородной функцией, хотя на оригинале она неоднородна. Однородность на модели может выражаться в том, что состояниям и аргумента и функции мы присвоили одни и те же имена (например, «да» и «нет» в случае двузначной системы).

После всех уточнений мы можем конкретизировать, что в математической логике имеют дело прежде всего со структурными моделями, отражающими однородные двузначные функции. Эти конструкты называют логическими функциями Буля¹. Если число значений функции или аргументов конечно (т. е. не бесконечно), но не равно двум, то такие функции также считаются логическими, но это уже многозначные, а не Булевы функции.

Если число значений функции и аргументов дискретно, но бесконечно, либо оно бесконечно в связи с тем, что состояния элементов системы могут изменяться «абсолютно плавно», т. е. недискретно, с любым числом градаций в заданном интервале, то такие системы и их структурные модели относятся уже к компетенции не математической логики, а «обычной» математики (например, арифметики, дифференциального и интегрального исчисления). Таким образом, нет никакого ка-

¹ Джордж Буль — английский математик, в работе которого «Исследование законов мысли», вышедшей в 1854 г., почти на современном уровне изложены основы математической логики двузначных отношений.

чественного разрыва между математической логикой и математикой. А к вопросу о связях этих наук с традиционной формальной логикой мы вернемся в последней главе.

Дополнительные значения термина «функция»

Термин «функция» нередко употребляется не в его основном, терминологическом, а в переносном, хотя и близком к основному, значении. Например, говоря о типах функциональной зависимости, а не о самой функции (которая лишь потому и моделирует своими состояниями состояния аргументов, что находится с аргументами в функциональной зависимости), нередко сокращают двухсловный термин «функциональная зависимость» до однословного «функция». Поэтому, во избежание недоразумений, следует при чтении математической литературы обращать внимание на то, в каком из указанных значений употреблен термин «функция».

Есть еще третье значение термина «функция», весьма обычное в нематематической литературе. Оно синонимично значениям слов «роль», «предназначение», «место» чего-то или кого-то — когда, например, задают вопрос: «А какова его функция во всем этом?»

Воспользовавшись нашей терминологией, такое понимание термина «функция» можно пояснить следующим образом. Если в некоторой системе нас интересует какой-либо элемент не своими индивидуальными свойствами, а как «пучок пересечения отношений в системе», т. е. именно как структурный элемент, находящийся в определенной сети отношений с другими элементами, то в качестве обобщенного названия такой структурной характеристики элемента системы и используется термин «функция» в его третьем значении. Следовательно, это значение гораздо шире, чем основное значение термина «функция».

Например, если имеется функциональная цепь, т. е. простейшая система из трех составных частей: элемента, изменяющего свои состояния при определенных воздействиях, элемента, моделирующего эти состояния путем изменения своих состояний, и из структуры отношений между состояниями элементов, то «функция» первого элемента цепи заключается в том, чтобы воспринимать воздействия, изменять при этом состояния и благодаря наличию отношений с другим элементом изменять соответственно его состояния. «Функция» второго элемента — находиться с первым в отношениях, задаваемых наличием структуры в системе, и соответственно изменять свои состояния при изменении состояний первого элемента. «Функция» структуры — быть связующим звеном между первым и вторым элементом.

Если в одном и том же контексте термин «функция» употребляется в первом и третьем значении, то возможна такая парадоксальная терминология: «данный элемент в цепочке функциональной связи выполняет функцию аргумента, тогда как второй элемент этой системы выполняет функцию функции». Чтобы не возникали подобные нагромождения терминов, которые могут показаться бессмыслицей, необходимо всегда специально оговаривать, в каком значении употреблен термин «функция» и не допускать, чтобы в одном контексте за ним подразумевались различные значения. В данной работе без оговорок термин «функция» будет употребляться только в его основном математическом значении.

Так как термин «функция» в третьем значении может относиться и к собственно функции, и к аргументу, и к структуре функциональной зависимости, а само наличие функциональной цепи в системе может использоваться как естественный индикатор для выявления элементов и системных отношений, то сама процедура подобной естественной индикации с помощью функциональных цепей обычно называется «функциональным подходом к исследованию системы». Такой способ исследования справедливо считается наиболее объективным, так как он опирается прежде всего на данные естественных индикаторов. Однако, так как в терминологическом отношении понятие «функционального подхода» соотносится не с первым, математическим, а с третьим, расширенным значением термина «функция», то понятие естественного индикатора в большинстве случаев способно более наглядно отразить сущность методики исследования, чем понятие функционального подхода.

В математике используется еще термин оператор, который сопоставим с понятием функциональной зависимости. Этот термин весьма удачен и получает распространение в кибернетической литературе. В соответствии с ним получают новые названия и остальные члены функциональной цепи. Аргумент называется «операндом» (на него направлено воздействие оператора), а функция — образом. Последний термин несколько не согласуется с двумя остальными, но в нем ярко подчеркнута сущность функции как модели, отражающей состояния аргумента.

И, наконец, когда функция противопоставляется аргументу, то среднее звено функциональной цепи в логической литературе иногда называют ф у н к т о р о м. По-видимому, это наиболее удачный термин, так как он отражает и идею, близкую к значению слова оператор и сохраняет яркую смысловую связь с функциональной зависимостью (функциональным логическим отношением, если рассматривается «логический» объект).

ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ И ЗАКОНЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ

Логические отношения, логические константы

Сколь ни сложна структура конкретной системы, ее можно изучать и описывать по частям, т. е. выявляя в ней сравнительно небольшое число типов простейших стандартных узлов, стандартных функциональных цепей. После того как выделены эти стандартные узлы, описание анализируемой или синтезируемой системы превращается в описание конкретной комбинации этих узлов, т. е. в описание структуры связи узлов, которая также может быть разложена на стандартные узлы. Чем сложнее система, тем выше ярусы ее структуры, но на каждом из ярусов представлены одни и те же типы функциональных зависимостей.

Если сравнивать между собой две функциональные цепи, у которых аргументы и функции однородны и имеют одинаковое число состояний (т. е. значений), то различие между этими цепями при одинаковом числе аргументов может быть только за счет способа связи между значениями аргумента и функции, т. е. за счет структуры отношений между воздействиями и результатом. На функциональном языке это значит, что цепи отличаются только видом функциональной зависимости. Так как в дальнейшем мы будем иметь дело с логическими функциями Буля (т. е. двузначными функциями), то описание стандартных логических узлов должно свестись к описанию функциональных логических цепочек, отличающихся средним звеном этих цепочек — функциональной логической зависимостью, или, что то же самое, логическим отношением. Иными словами, мы должны познакомиться с основными типами логических отношений (функторов). (Выражение «с основными типами логических функций» было бы не совсем точным, так как собственно функции в сравниваемых цепях одинаковы: двузначные и однородные своему аргументу; однако в литературе такая не совсем точная терминология встречается.)

Начнем с тривиальных логических отношений. Если элемент системы вообще не связан ни с какими другими элементами, то он не может изменить своего состояния. Следовательно, в данном случае логическое отношение такой функции выражается просто в отсутствии какого-либо отношения, и функцией она может называться лишь условно (подобно тому как условно множеством называют и такие множества, которые не содержат ни одного элемента). Функции с нулевой

функциональной зависимостью называют постоянной величиной, или константой. В логике эта константа должна быть названа логической константой. В Булевой логике она имеет неизменно значение 0 или 1 (если дать этим значениям цифровые имена).

К нетривиальным относятся функции одного и большего числа аргументов. Однако достаточно рассмотреть функции одного и двух аргументов, а затем перечислить и описать логические отношения, которые при этом получаются; после этого функции трех и большего числа аргументов удастся представить как комбинации рассмотренных функций.

Чтобы познакомиться со всеми типами логических отношений функциональных цепей с одним и двумя аргументами, уже недостаточно словесного описания, как в случае тривиальных логических отношений. Для этой цели мы воспользуемся методикой анализа структурных свойств так называемого «черного ящика». Эта методика оформилась лишь в последние годы, в связи с распространением кибернетических идей, и познакомиться с ней совершенно необходимо.

«Черный ящик»

Сущность метода «черного ящика» излагается очень просто, если воспользоваться уже введенными выше понятиями.

«Черный ящик» — это образное название любого объекта, который подлежит изучению. Если это малоизвестный объект, то изучение начинается с выявления его элементов. После этого желательно наиболее полно разобраться в его структуре. Иногда структура доступна прямому наблюдению, если «ящик» имеет легко открываемую «крышку», так, что можно заглянуть в его «внутренности». Но часто, а скорее почти всегда, положение намного сложнее. «Ящик» открывать не разрешается, а если он и будет открыт, то сеть связей элементов окажется при этом поврежденной. Значит, для выявления внутренней структуры объекта остается один выход: изучая свойства «черного ящика» по его внешним свойствам, создать более или менее удачную гипотезу о его внутренней структуре. Иначе говоря, построить предполагаемую структурную модель внутреннего устройства «черного ящика».

Как это сделать? Мы уже говорили, что, пробуя различные типы воздействий на исследуемый объект, по нашему предположению — сложный, т. е. систему, мы можем наткнуться на такой тип воздействия, который вызывает результат в элементах системы, непосредственно воспринимающих это воздействие.

В таком случае элементы будут индицировать сами себя. (Если мы догадываемся, каков этот объект, то поиск нужного воздействия не представляет труда.) Таким способом мы

начинаем обнаруживать элементы объекта. Более детальный анализ элементов можно будет провести, если нам удастся подобрать хороший внешний индикатор. Предположим, что сами элементы, проявляющиеся на поверхности «ящика», найти удалось. Следующий этап, как мы тоже уже отмечали, — выявление и описание структуры. Для этого нужно найти тип воздействия на выделенные элементы исследуемого сложного объекта, чтобы при воздействии на одни элементы результат (если взаимосвязь между элементами действительно имеется) проявился на других элементах. Все факты такой связи воздействия с результатом, т. е. факты наличия функциональных цепей в системе, должны быть зафиксированы в специальном протоколе; в свете наших понятий, он должен квалифицироваться как запись показаний естественного индикатора, т. е. как первая грубая модель исследуемой системы (представленная в словесной или, например, цифровой, табличной и тому подобной форме). Протокол позволяет обозревать в более удобном виде типы соответствий между состояниями возбуждаемых элементов и состояниями элементов, отражающих результаты возбуждения на уровне наблюдения.

На основании показаний естественного индикатора исследователь должен догадаться, какова возможная структура связи между элементами, скрытая внутри «ящика». Другими словами, каков вид функциональной зависимости между «входными» (испытывающими воздействие) и «выходными» (проявляющими результат) элементами системы и их состояниями. В принципе может быть неограниченное число внутренних структур, приводящих к данному конкретному типу соответствий между состояниями «входа» и «выхода» «черного ящика». Но тем не менее это уже не любые структуры, а вполне определенный их тип. Если же предположить, что внутри «черного ящика» закрыта простейшая из структур данного типа, то возможные варианты структур сводятся к нескольким или даже к единственной структуре, единственному типу функциональной зависимости.

На примере выявления внутренней структуры «черного ящика» мы и рассмотрим основные типы простейших логических отношений. После этого нам откроется возможность сформулировать некоторые правила преобразования данных структур и их комбинирования в более сложные структуры.

Логическое отношение у т в е р ж д е н и е

Пусть перед нами действительно черный ящик: тяжелый, закрытый со всех сторон, холодный на ощупь металлический черный ящик. Когда мы стали его ощупывать, мы, собственно, уже начали искать типы воздействия и естественные индикаторы, с помощью которых можно было бы выявить его

внешние элементы. И вот в одном месте мы почувствовали результат воздействия: небольшой кружочек поверхности ящика при нажатии пальца слегка углубился, но дальше не пошел. Когда мы прекратили воздействие, кружочек снова сравнялся с поверхностью ящика. Таким образом, мы нащупали первый элемент снаружи черного ящика, который воспринимает воздействие и сам проявляет результат этого воздействия (вдавливаясь внутрь при нажатии). Имея определенный жизненный опыт, мы можем заключить, что мы обнаружили на черном ящике кнопку.

Продолжая ощупывать ящик, мы почувствовали участок гладкой выпуклой поверхности, воспринимающейся пальцами как менее прохладная по сравнению с остальной металлической поверхностью. Следовательно, воздействуя на ящик теплом своих рук, мы обнаружили место, которое меньше поглощает тепло. Это — второй элемент, обнаруженный снаружи черного ящика. Снова призвав свой жизненный опыт, мы можем заключить, что этот второй элемент — слегка выступающая часть сферы стеклянной колбы электрической лампочки.

Никакие другие типы воздействий не позволили нам выявить новые элементы. Поэтому мы приступили ко второму этапу исследования свойств черного ящика — к выявлению внутренней его структуры, хотя возможности заглянуть в эту внутренность мы не имеем. Предположим, что выявленные нами два элемента представляют собой крайние звенья функциональной цепи. Нас же интересует среднее звено — функциональная зависимость, скрытая внутри ящика. Чтобы ее обнаружить, начнем снова подбирать воздействия. Например, надавили пальцем на стекло лампочки и наблюдаем за вторым элементом — кнопкой: никаких изменений в ее состоянии не заметно. Но вот мы надавили на кнопку — и сразу увидели, что лампочка загорелась. Отпустили кнопку — лампочка погасла. Провели этот эксперимент много раз — взаимосвязь между воздействиями и результатом одна и та же. Тогда мы решили составить протокол наблюдений, т. е. с помощью избранных графических элементов построить модель наблюдаемых отношений между элементами изучаемой системы.

Условимся, что буквой *K* мы будем отражать в протоколе первый элемент — кнопку, а буквой *L* второй — лампочку. Так как обнаружено, что элементы в исследуемой системе имеют по два состояния (кнопка нажата — не нажата, лампочка горит — не горит), то будем моделировать наблюдаемую неоднородную функциональную цепь с помощью однородной структурной модели, где и аргумент и функция имеют одинаковые имена состояний: 0 и 1.

Цифра 1 обозначает воздействие (кнопка нажата) или ре-

зультат (лампочка горит). Цифра 0 обозначает отсутствие воздействия (кнопка не нажата) или отсутствие результата (лампочка не горит). Тогда в краткой записи протокол будет иметь вид:

K	L
1	1
0	0

Иначе говоря, читая горизонтальные строчки цифр, мы видим, что когда $K = 1$ (кнопка нажата), то и $L = 1$ (лампочка горит). Если же $K = 0$ (кнопка не нажата), то $L = 0$ (лампочка не горит). В математической логике этот тип связи записывается так: $L = K$, « L связано с K операцией утверждения».

Нетрудно догадаться, что может быть внутри такого черного ящика: он может содержать контактную перемычку Π_K , которая при нажатии кнопки замыкает электрическую цепь, и источник питания для поддержания тока лампочки, например батарейку E (рис. 1). Проверим, что наша догадка не противоречит протоколу наблюдений.

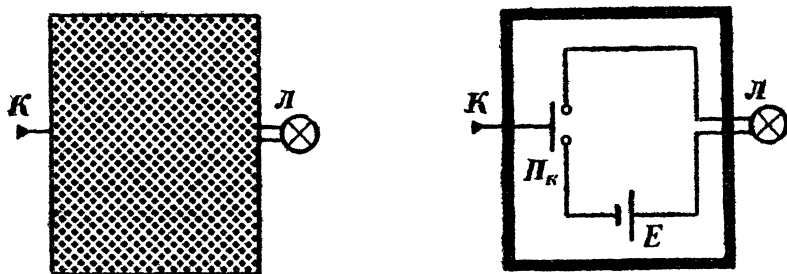


Рис. 1. Внешний вид и внутренняя схема черного ящика, структура которого представляет собой логическое отношение «утверждение»

Очевидно, что лампочка может загораться в нашей схеме только, когда контактная перемычка Π_K прижата к контактам. Следовательно, связь между состоянием Π_K и поведением лампочки может быть записана как $L = \Pi_K$. Но также очевидно, что контактная перемычка Π_K лишь тогда, прижимаясь, замыкает контакты, когда нажата кнопка K . Значит, $\Pi_K = K$. Отсюда и следует, что $L = \Pi_K = K$, т. е. $L = K$, что и отражено в протоколе.

Нельзя забывать, что возможны и другие варианты внутреннего устройства черного ящика и мы рассмотрели лишь одну из схем, отвечающих данному протоколу. Можно еще

добавить, что рассмотренная схема, отвечающая отношению «утверждение» — самая простая. Варианты более сложных схем мы будем рассматривать отдельно.

Логическое отношение отрицание («не»)

Исходные условия те же: черный ящик имеет кнопку K и лампочку L . Однако когда мы подошли к ящику, лампочка уже горела, а как только нажали кнопку, она погасла. Отпустили кнопку — лампочка снова загорелась. Следовательно, протокол наблюдений за этим черным ящиком принимает несколько иной вид:

K	L
1	0
0	1

При $K=1$ (кнопка нажата) $L=0$ (лампочка не горит), а при $K=0$ (кнопка не нажата) $L=1$ (лампочка горит). Следовательно, лампочка ведет себя «наоборот» по отношению к кнопке, она отрицательно реагирует на ее воздействия. Этот тип связи между воздействием и результатом называется в логике отрицанием и условно записывается следующим образом: $L = \bar{K}$.

Черта над буквой \bar{K} и говорит о том, что если $K=1$, то \bar{K} , т. е. L , равно 0, и наоборот. Следовательно, в логике $\bar{1}=0$; $\bar{0}=1$. Иначе говоря, «неналичие» есть отсутствие, «неотсутствие» есть наличие. Операцию отрицания нередко называют в логике инверсией, а схему, обеспечивающую выполнение этой операции, в технике часто называют «схемой не».

Нетрудно догадаться и о возможном внутреннем устройстве рассмотренного черного ящика (рис. 2).

Когда кнопку K нажимают, контактная перемычка P_K отходит от контактов, электрическая цепь размыкается и лампочка L гаснет. Рассуждая, как и прежде, получаем: $L = \bar{P}_K$; $P_K = \bar{K}$, следовательно, $L = \bar{P}_K = \bar{\bar{K}}$ или $L = K$. Другими словами, действительно, данный вариант схемы удовлетворяет протоколу логического отношения «отрицание». Эта схема также простейшая, воплощающая «логическое отрицание».

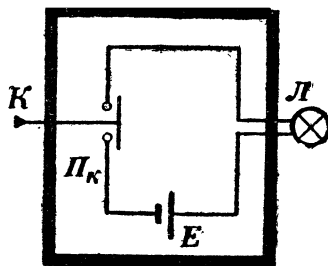


Рис. 2. Внутренняя схема черного ящика, представляющего собой логическое отношение «отрицание»

Мы рассмотрели простейшие логические отношения на примере электрических схем. Рассмотрим и житейские случаи.

Обозначим буквой C тот факт, что некоторый человек является совершеннолетним, а буквой Π — что он имеет паспорт. Тогда высказывание «он совершеннолетний» практически равносильно утверждению «он уже имеет паспорт», а высказывание «он не совершеннолетний» позволяет сделать вывод, что «он не имеет паспорта». В буквенной записи это будет представлено как $\Pi = C$, а в табличной:

C	Π
1	1
0	0

Теперь возьмем пример на отрицание. Высказывание «я достану билет на поезд» обозначим буквой B , а «я еще задержусь в вашем городе» буквой Z . Тогда, если «я достану билет на поезд» (т. е. если $B=1$), то я «не задержусь в вашем городе» (т. е. $Z=0$), а если «я не достану билет на поезд» (т. е. $B=0$), то «я еще задержусь в вашем городе» (т. е. $Z=1$). В буквенной записи это должно быть представлено как $Z = \bar{B}$, в табличной записи:

B	Z
1	0
0	1

Совершенно ясно, что если логическая функция зависит только от одного аргумента, то имея два значения, она не может вступать с аргументом ни в какие другие логические отношения, кроме «утверждения» и «отрицания».

Теперь рассмотрим функции двух аргументов.

Отношение логическое произведение

«и... и, и»

На этот раз мы обнаружили черный ящик, у которого также есть лампочка, но на входе не одна, а две кнопки, например верхняя и нижняя (рис. 3). Обозначим их буквами B и H , а лампочку по-прежнему будем обозначать буквой L .

Такой ящик, который имеет как бы два канала воздействия, т. е. два входа, должен вести себя более сложно, чем ящики «с одной кнопкой». В зависимости от того, какая схема связей кроется внутри черного ящика, мы будем иметь различные протоколы наблюдений за ним.

Пусть обнаружилось, что пока мы не нажимали на кнопки

или нажимали только на одну из них, лампочка не загорелась. И лишь когда мы нажали и кнопку B , и кнопку H , она загорелась. Следовательно, протокол должен быть записан следующим образом:

B	H	L
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Этот тип связи между двумя воздействиями и одним результатом называется «логическим произведением». Такое название дано, в частности, потому, что если мы будем перемножать в каждой табличной строке две первые цифры, то третья цифра будет как раз равной их произведению: $1 \cdot 1 = 1$; $1 \cdot 0 = 0$; $0 \cdot 1 = 0$; $0 \cdot 0 = 0$. Однако нужно помнить, что это только внешний прием для запоминания, так как умножение — отношение количественное; мы же интересуемся вопросом: «есть» или «нет» результат, и не спрашиваем, «сколько результата», «сколько интенсивен результат».

Поскольку отношение «логическое произведение» дает результирующую «единицу» лишь тогда, когда и одно, и другое из двух воздействий также имеет значение 1, то этот тип связей в логике называют нередко «операцией ИИ» или просто «операцией И».

Кроме того, для этого отношения существует название «конъюнкция», а в технике соответствующие схемы называют «схемой И» или «схемой совпадений».

Логическое произведение обозначается символически разными способами. Мы будем пользоваться первым способом — знаком умножения, т. е. точкой, а иногда, как и в алгебре, эту точку между буквами будем опускать.

Представим себе теперь возможный вариант внутренней схемы черного ящика, для которого справедлив приведенный протокол. Этот ящик может быть, например, таким, как на рис. 4.

Из схемы видно, что лампочка загорится лишь когда будет прижата к контактам и контактная перемычка P_a , и кон-

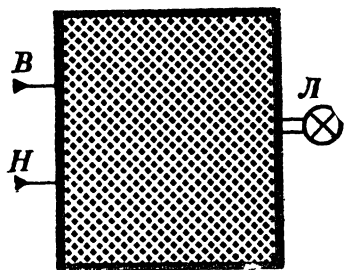


Рис. 3. Пример черного ящика с двумя входами и одним выходом.

тактная перемычка Π_n , т. е. $L = \Pi_v \Pi_n$. Но контактные перемычки прижимаются лишь под воздействием силы, нажимающей на кнопки, т. е. $\Pi_v = B$, $\Pi_n = H$. Следовательно, можно записать, что $L = \Pi_v \cdot \Pi_n = B \cdot H$, т. е. $L = B \cdot H$. Итак, приведенная схема обеспечивает соответствие протоколу наблюдений, хотя возможны и другие (правда, более сложные) схемы, равноценные с точки зрения поведения черного ящика.

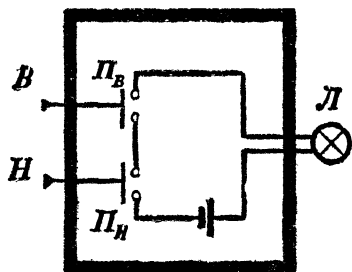


Рис. 4. Внутренняя схема черного ящика, осуществляющего операцию «логическое произведение»

Рассмотрим жизненную цепочку событий, представляющую собой «логическое произведение». При каких условиях ученик, кончающий в этом году среднюю школу, на следующий год будет студентом? (Событие «станет студентом» обозначим буквой C .) Для этого ученик должен получить аттестат зрелости (обозначим это событие буквой A) и пройти по конкурсу на вступительных экзаменах в вуз (обозначим это через K).

Следовательно, в краткой логической записи результат «стать студентом» зависит от условий так: $C = A \cdot K$. Действительно, если только и $A=1$, и $K=1$ (т. е. аттестат получен и на экзаменах ученик прошел по конкурсу), то этот ученик стал студентом, т. е. $C=1$. При всех других комбинациях логических переменных $C=0$.

Отношение логическая сумма («или, хотя бы»)

Снова имеем черный ящик с двумя кнопками B и H и лампочкой L . Пока мы не притрагиваемся к кнопкам, лампочка не горит. Нажали кнопку B — загорелась. Нажали кнопку H — тоже загорелась. Нажали обе кнопки одновременно — лампочка загорелась снова. Составили протокол наблюдения за поведением этого черного ящика:

B	H	L
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

В протоколе отмечен факт, что лампочка загорается тогда, когда нажата хотя бы одна из кнопок или же обе сразу.

И если только обе кнопки не нажаты, лампочка гаснет. Такое логическое отношение между воздействием и результатом лучше было бы назвать хотя бы; однако это название очень длинное, поэтому (не совсем точно) данное отношение называют словом *или*, имея в виду, что результат имеет место тогда, когда есть *или* одно, *или* другое, *или* оба воздействия сразу. Называют это отношение также «дизъюнкцией» (и еще «неисключающей дизъюнкцией») и «логической суммой». Правда, если складывать цифры воздействия и смотреть на цифру результата, то сумма в привычном нашем понимании получается несколько странная: три из четырех сумм — обычные ($0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$), но четвертая ($1+1=1$) может вызвать недоумение. Однако нужно напомнить, что мы занимаемся не сложением количеств, а условным изображением того, будет или не будет результат, когда два условия соблюдены. Наличие же результата обозначено только цифрой 1, ведь мы не интересуемся, как ярко горит лампочка, или с какой силой мы нажимали на кнопки. Важно, что лампочка горит, когда нажата хотя бы одна из кнопок или обе кнопки — следовательно, факт присутствия в условиях 1 и 1 дает в результате тоже 1.

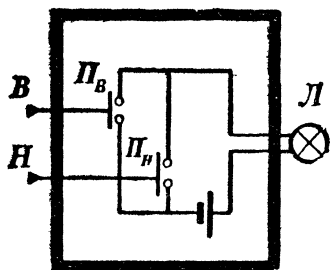


Рис. 5. Внутренняя схема черного ящика, представляющая собой отношение «логическая сумма».

В символической записи логическая сумма выглядит, например, так: $L = B + H$ или $L = B \vee H$. Знак « \vee » взят из латинского языка, где есть союз «*vel*», который обозначает «или то, или другое, или то и другое вместе». Мы будем пользоваться знаком « $+$ », не забывая, однако, что это не арифметический знак, а условный знак для «логической суммы».

В заключение представим себе отношение «логической суммы» в виде возможной схемы внутренности черного ящика, ведущего себя в соответствии с только что рассмотренным протоколом (рис. 5). В такой схеме через лампочку L течет ток, если цепь замкнута хотя бы одной из контактных переключателей: P_B или P_H , причем замыкание сразу двух переключателей приводит к тому же результату (и 1, и 1 вызывает 1).

Следовательно, $L = P_B + P_H$. Но в то же время, поскольку контактные переключатели замыкают цепь лишь вследствие нажатия кнопок, то $P_B = B$ и $P_H = H$. Поэтому $L = P_B + P_H = B + H$. Иначе: $L = B + H$, т. е. данная простейшая схема действительно соответствует отношению «логической суммы».

Логическое отношение антиэквивалентность («или... или»)

Черный ящик, представляющий это отношение, ведет себя следующим образом: лампочка загорается, когда нажата одна из кнопок, причем безразлично какая. Если же нажаты обе кнопки, либо обе не нажаты, то лампочка не горит. Следовательно, этот черный ящик может быть охарактеризован таким протоколом наблюдений:

B	H	L
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Как видим, для наступления ожидаемого эффекта необходима противоположность в соблюдении условий: если первое соблюдено ($B = 1$), то второе не должно быть соблюдено, ($H = 0$), если же первое не соблюдено ($B = 0$), то соблюдено второе ($H = 1$). Когда же условия совпадают (т. е. либо оба условия соблюдены, либо оба не соблюдены), то желательный эффект не наступает (L остается равным 0). Таким образом, функция, связанная с аргументами отношениями антиэквивалентности, принимает состояние 1, когда или первый, или второй аргумент находится в состоянии 1, но не оба аргумента вместе. Поэтому отношение антиэквивалентности называют еще отношением или... или, а также исключающей дизъюнкцией, так как совместное появление состояния 1 у обоих аргументов исключается. Рассмотрим жизненную ситуацию, связь между событиями в которой подчинена такому отношению антиэквивалентности (или... или).

Пусть речь идет о небольшом фабричном цехе. Цех досрочно выполнил план, и дирекция фабрики выделила определенный денежный фонд для премирования лучших работников.

Цеховая администрация наметила предварительные кандидатуры премируемых, и в списке работников цеха против фамилий соответствующих товарищей была поставлена галочка. (Обозначим сведения о решении администрации буквой B ; если галочка стоит против фамилии, то $B = 1$, если нет, то $B = 0$.)

Этот список с пометками был передан профсоюзному активу цеха для уточнения. Активисты лучше, чем администрация, знали, как работал каждый сотрудник цеха. (Обозначим мнение о работе сотрудника буквой H ; если работник зау-

рядный, то $H=0$, если же он работал очень хорошо, то $H=1$.) После того как профсоюзный актив обсудил список, против некоторых фамилий появился крестик. (Сведения о крестике обозначим буквой L .) Это значит, что о соответствующих работниках члены комиссии намеревались беседовать с администрацией цеха в связи с предстоящим премированием.

Нетрудно догадаться, следствием каких значений B и H было то или иное значение реакции профсоюзной комиссии (отраженная в функции L).

Если работник выдающийся ($H=1$) и против его фамилии стоит галочка о премировании ($B=1$), то профсоюзные активисты ничего не имеют против такого решения и не ставят крестика против фамилии этого работника ($L=0$). Если работник заурядный или даже плохой ($H=0$) и против его фамилии нет галочки о премировании ($B=0$), то члены комиссии также не намерены обсуждать вопрос о премировании этого работника, и крестик в списке не стоит ($L=0$). Но тех работников, которые трудились значительно лучше остальных ($H=1$) и против фамилий которых не стоит галочка о премировании ($B=0$), необходимо было отстоять перед администрацией, и профсоюзные активисты против фамилий этих работников поставили крестики ($L=1$). Поставлены были крестики ($L=1$) и против фамилий тех, кто работал плохо ($H=0$), но галочка свидетельствовала о том, что их намерены премировать ($B=1$); нужно было доказать администрации, что премирование таких работников недопустимо.

Нетрудно увидеть в перечне зависимостей значений L от значений H и B таблицу антиэквивалентности.

Итак, вполне реальная жизненная цепочка связи одних явлений с другими может полностью описываться таким простейшим логическим отношением, как антиэквивалентность. Именно потому, что этот тип отношений в повседневной и бытовой, и научной практике встречается очень часто, его приходится часто описывать и моделировать — и, следовательно, он нуждается в специальном названии и способе условного обозначения. Следовательно, антиэквивалентность так же, как утверждение, отрицание, логическое произведение и сумма — это один из конструктов Булевой алгебры.

Теперь рассмотрим один из возможных вариантов схемы черного ящика, входы и выходы которого находятся в отношении антиэквивалентности. Мы еще не затрагивали вопрос о том, как «догадаться», какой должна быть схема при заданном протоколе наблюдений за черным ящиком, но проверить, удовлетворяет ли представленная схема данному протоколу, мы можем. Проведем необходимые операции, чтобы убедиться, что схема, изображенная на рис. 6, есть схема антиэквивалентности.

Схема содержит источник питания E , лампочку L , кнопки V и H и две параллельные контактные цепи Π_{λ} и Π_{η} . Очевидно, что лампочка L загорится, когда ток потечет хотя бы по одной из параллельных цепей, т. е. по Π_{λ} , или Π_{η} или по обоим. Поэтому можно записать, что $L = \Pi_{\lambda} + \Pi_{\eta}$. Но каждая из параллельных цепей может проводить ток лишь когда прижаты к контактам обе из контактных перемычек. Записывая это условие в логической форме, получаем: $\Pi_{\lambda} = \Pi_{\text{вл}} \cdot \Pi_{\text{нл}}$, $\Pi_{\eta} = \Pi_{\text{вп}} \cdot \Pi_{\text{нп}}$. Следовательно, $L = \Pi_{\lambda} + \Pi_{\eta} = \Pi_{\text{вл}} \cdot \Pi_{\text{нл}} + \Pi_{\text{вп}} \cdot \Pi_{\text{нп}}$. Но, как видно из рисунка, замыкание контактами перемычками соответствующих цепей связано (логическим отношением утверждения или отрицания) с нажатием кнопок V и H : $\Pi_{\text{вл}} = V$; $\Pi_{\text{вп}} = \bar{V}$; $\Pi_{\text{нл}} = H$; $\Pi_{\text{нп}} = \bar{H}$. Значит: $L = \Pi_{\text{вл}} \cdot \Pi_{\text{нл}} + \Pi_{\text{вп}} \cdot \Pi_{\text{нп}} = V \cdot H + \bar{V} \cdot \bar{H}$, т. е. окончательно: $L = V \cdot H + \bar{V} \cdot \bar{H}$.

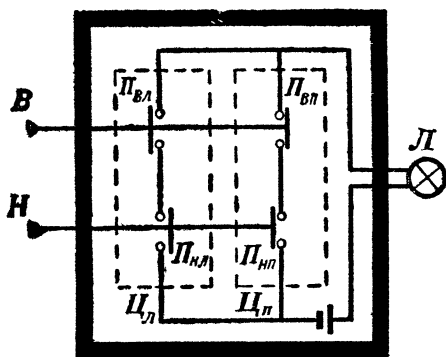


Рис. 6. Внутренняя схема черного ящика представляющая собой логическое отношение «антиэквивалентность».

Помня, что знак логической суммы соответствует выражению хотя бы, а знак произведения обозначает и, мы можем найденную формулу прочитать словами и убедиться, что получающееся выражение соответствует смыслу логической операции «антиэквивалентность». «В случае антиэквивалентности требуемый результат наступает при соблюдении хотя бы одного из двух условий: наступило событие V и не наступило H , или не наступило V и наступило H ».

Но можно проверить справедливость полученного выражения для антиэквивалентности, подставляя значение 0 и 1 в формулу этого отношения.

Итак, пусть $V = 1$ и $H = 1$, тогда $L = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0$; при $V = 1$ и $H = 0$; $L = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 + 0 = 1$; при $V = 0$ и $H = 1$; $L = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0 + 1 = 1$; при $V = 0$ и $H = 0$; $L = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$.

Иначе говоря, мы убеждаемся, что результаты получают- ся точно такие же, как в протоколе, значит, найденная формула действительно отражает антиэквивалентную связь между V и H через отношения логического отрицания, произведения и суммы. Итак, $L = VH + \bar{V}\bar{H}$.

Возможны и другие способы выражения данного отношения через отношение отрицания, произведения и суммы, о чем речь пойдет позже. А сейчас обратим внимание на следующее. Рассматривая протокол наблюдений за черным ящиком, мы видим, что требуемый результат возникает лишь в тех случаях, которые соответствуют строчкам с 1 в последнем столбце, причем этот результат наступает, когда хотя бы в одной строке есть 1. При этом ясно также, в каком состоянии находятся входы черного ящика. Например, при операции «антиэквивалентность» в протоколе наблюдений L имеет 1, когда $B = 1$ и $H = 0$, или когда $B = 0$ и $H = 1$. Следовательно, глядя на этот протокол, мы могли бы сразу выразить отношение антиэквивалентности через отрицание, произведение и сумму: $L = B \cdot \bar{H} + \bar{B} \cdot H$, т. е. ту же формулу. (К этому вопросу мы еще вернемся.)

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ И НОМЕР ЛОГИЧЕСКОГО ОТНОШЕНИЯ

Нематематики и инженеры, не связанные с задачами вычислительной техники, могут быть незнакомы с двоичной системой счисления. Поэтому нам придется временно отвлечься от рассмотрения новых типов черных ящиков и новых типов логических отношений и рассмотреть различие между обычной десятичной и двоичной системой счисления (или «системой счета»). Это нужно, во-первых, потому, что с помощью двоичной системы счисления мы сможем легко сосчитать, сколько вообще может быть типов черных ящиков, если они имеют по две кнопки и по одной лампочке. Во-вторых, на основе двоичной системы счисления удобнее нумеровать различные типы логических отношений. И, в-третьих, иметь представление о двоичной системе счисления вообще необходимо потому, что рано или поздно многим придется знакомиться с примерами практического применения кибернетических методов и устройств, значительная часть которых (о чем все уже не раз читали и слышали) основана на использовании именно двоичной системы счисления.

Чтобы лучше понять принцип счета по двоичной системе, подумаем, как вообще можно считать. Для этого рассмотрим несколько примеров.

Единичная система счисления

Предположим, что три человека, стоящие, скажем, у окна, решили сосчитать число машин определенной марки, проехавших мимо их дома. Предположим, что обычному словесному счету они не научены, и поэтому вынуждены считать с помощью загибания пальцев.

Так как каждый из считающих имеет на каждой руке по пять пальцев, то всего у троих 30 пальцев.

Как воспользоваться этими пальцами? Оказывается, существует не один прием счета. Сначала наши три друга договорились считать так. Один смотрит в окно, и всякий раз, когда проезжает мимо нужная машина, он загибает себе один палец. Второй следит не за машинами, а за первым считающим. Когда у первого все пальцы оказались загнутыми, к окну подходит второй и продолжает счет таким же образом. Третий следит за вторым. Когда у второго не осталось незагнутых пальцев, место у окна занимает третий.

Сколько машин могут сосчитать три наших друга при такой системе счета? Столько, сколько у всех них вместе пальцев на руках, т. е. 30. Такая система счета называется единичной. Чтобы сосчитать, например, 1000 машин, нужно иметь 100 человек, загибающих пальцы.

Десятичная система счисления

Однако всем ясно, что при более разумном использовании тех же самых пальцев можно сосчитать гораздо больше предметов. Предположим, что об этом догадались три наших друга и договорились иначе распределить свои роли во время счета. Первый смотрит в окно и загибает один палец, когда видит машину. Если все пальцы оказались загнутыми, то после этого он их разгибает и начинает снова загибать по одному, с первого по десятый, при виде каждой очередной машины.

Второй не смотрит в окно. Он следит только за первым. И лишь когда первый разгибает все 10 пальцев, второй загибает на своей руке один палец. Так он действует до тех пор, пока все пальцы и у него не окажутся загнутыми. После этого он их тоже разгибает и, продолжая следить за первым, снова загибает по одному пальцу, когда первый разгибает пальцы сразу на обеих руках.

Третий не смотрит ни на улицу, ни на первого считающего. Он следит только за вторым и загибает палец лишь тогда, когда второй в определенный момент, не имея больше незагнутых пальцев, вынужден их сразу разогнуть.

Нетрудно видеть, что теперь наши друзья считают так, как обычно считаем мы: на загнутых пальцах третьего представлено количество сосчитанных сотен, на пальцах второго — количество сосчитанных десятков, а на пальцах первого — количество сосчитанных единиц.

Счет и память

Между прочим, пальцы наших друзей являются не только у гройством для счета, но и устройством для сохранения результатов счета. Предположим, что мимо окна давно не про-

ходило ни одной машины. Наши друзья сидят в ожидании. В комнату пошли Вы. Вам достаточно взглянуть на их пальцы, чтобы сразу увидеть, сколько машин уже прошло мимо окна. Следовательно, загнутые пальцы как бы «запомнили» сосчитанное число. Поэтому любое устройство, которое может сохранять подобные сведения на более или менее долгое время, называется в кибернетике «устройством памяти». С точки зрения кибернетики, и обычные бухгалтерские счета — это десятичная счетная машина, способная «помнить» результаты счета до тех пор, пока ее косточки не будут сброшены в одну сторону (вправо).

Но вернемся к нашим трем друзьям. Более рациональная организация способа счета позволила им сосчитать с помощью 30 пальцев уже не 30, а 1000 машин.

Двоичная система счисления

Теперь предположим, что нашим друзьям пришла в голову идея попробовать считать не всеми десятью, а лишь одним указательным пальцем только одной (например, правой) руки. Что же они могут сделать, имея в своем распоряжении лишь три пальца на троих?

Самый простой, единичный счет для них явно невыгоден: после того, как мимо прошло три машины, все пальцы друзей окажутся загнутыми, и счет придется прекратить. Поэтому друзьям лучше воспользоваться уже рассмотренным распределением ролей: первый смотрит в окно, следя за машинами, второй следит за первым, третий — за вторым. Когда проходит одна машина, первый загибает палец, и все его пальцы оказываются загнутыми. Следовательно, когда проходит вторая машина, он разгибает палец, проходит третья — загибает, четвертая — разгибает и т. д. Что же ему остается делать, если палец всего один?

Второй загибает палец лишь для «запоминания», что первый — разогнул. Когда же первый еще раз разгибает палец, приходится разгибать и второму. Когда первый разгибает в третий раз, то второй снова загибает и т. д.

Роль третьего — следить за вторым. Всякий раз, когда второй разгибает палец, третий загибает свой указательный палец, если он не был уже загнут, и разгибает, если перед этим палец третьего уже был загнут.

Составим протокол поведения наших друзей в зависимости от того, сколько машин они заметили. Пусть столбец M — число машин, P — первый считающий, B — второй, T — третий. Через 0 обозначим тот факт, что палец не загнут, а через 1 — загнут. Таблица протокола получается такая:

Видим, что второй считающий загнул первый раз палец, когда прошло мимо две машины, третий — когда четыре, а

первый — когда одна. Иначе говоря, третий считает количество четверок прошедших машин, второй — количество их пар, первый — количество единиц. В любой строчке, если есть 1 в «старшей» колонке (т. е. колонке *T*), то четверка машин была, если 0, то четверки машин не было. 1 во второй колонке (*B*) говорит о паре машин, а в колонке «младшей» (*П*) — о наличии одной. Это и есть пример двоичной системы счисления.

<i>M</i>	<i>T</i>	<i>B</i>	<i>П</i>
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1
8	0	0	0
«Вес»	«4»	«2»	«1»

Каждая строчка из 0 и 1 есть двоичное число. Чтобы перевести двоичное число в обычное, нужно сложить количество «единиц» младшей колонки с количеством пар следующей и количеством четверок — в старшей, причем эти «количества» могут быть равными только нулю или единице.

Так число 7 в строке *M* = 7 является суммой $1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 4 + 2 + 1$, т. е. действительно = 7; число $5 = 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 4 + 0 + 1 = 5$. Чтобы легче было считать, в таблице, в нижней строке, указан «вес» каждой колонки: 4, 2 или 1. Число колонок, в которые вписываются нули и единицы двоичного числа, представляет собой число «разрядов» этого числа. Следовательно, первый разряд имеет наибольший «вес», каждый последующий — в два раза меньше, и последний разряд имеет всегда вес 1. Из таблицы видно, что когда наши друзья увидели восьмую машину, то всем пришлось разогнуть пальцы. Следовательно, при двоичной системе счисления им удалось сосчитать от 0 до 7 машин, т. е. из своих трех пальцев они смогли сделать 8 комбинаций. Существует общий закон: если мы имеем *K* элементов для двоичной системы счисления, например *K* пальцев, то максимальное число комбинаций в таком считающем устройстве равно 2^K . В нашем примере число $K = 3$, поэтому и получили $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ комбинаций.

Если бы элементов было, например, 10, то мы получили бы

10-разрядное двоичное число, и такое устройство имело бы $2^{10} = 1024$ комбинации. Так как каждый разряд двоичного числа имеет «вес» в два раза больший, чем предыдущий младший разряд, то для 10 разрядов, по мере возрастания их старшинства, мы имеем следующие веса: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512.

Однако вспомним о трех наших друзьях. Когда они считали по единичной системе, используя все 30 пальцев своих 6 рук, то смогли сосчитать только 30 машин; используя обычную десятичную систему, они сосчитали уже 1000 машин; но если они воспользуются своими 30 пальцами для счета в двоичной системе, то сколько же всего машин они смогут сосчитать?

Это будет 30-значное двоичное число, дающее 2^{30} комбинаций из нулей и единиц.

Как мы уже знаем, $2^{10} = 1024$. Значит, $2^{30} = 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} = 1024 \cdot 1024 \cdot 1024$. Если бы мы проделали это перемножение, то получили бы число больше миллиарда, т. е. больше 10^9 . Следовательно, пользуясь двоичной системой счисления, наши три друга смогли бы с помощью 30 пальцев сосчитать не только машины всех марок во всем мире, но и хозяев этих машин вместе с членами их семей, и даже после этого у друзей еще остались бы незагнутыми некоторые пальцы.

Как видите, двоичная система счисления не случайно широко используется в технике. Она позволяет сравнительно легко представлять и «запоминать» большие числа. А сделать какое-либо устройство, которое принимало бы лишь два состояния — 0 и 1, можно очень многими способами, и все они не сложнее, чем загнуть или разогнуть палец. Можно было бы показать, что суммирование и вычитание, умножение и деление в двоичной системе счисления осуществляется также чрезвычайно просто. Во всяком случае, намного проще, чем в нормальной, десятичной системе счисления. Это, в частности, одна из причин господства двоичной системы счисления в электронных цифровых вычислительных машинах.

О числе и номере основных логических отношений

Итак, поскольку теперь мы знакомы с двоичной системой счисления, то всякий раз, когда нам будут попадаться цепочки цифр, представляющие собой комбинации 0 и 1, мы легко сможем отличать одну комбинацию от другой, если предположим, что данная комбинация — результат счета каких-то объектов в двоичной системе счисления. При этом, как и в десятичной системе счисления, будем ставить старшие разряды в начале цепочки (например, в числе 1967 старшим является 1, так как она обозначает число тысяч, следующая 9 — число сотен и т. д.), а младшие последовательно бу-

дут ставиться сзади. Тогда протокол отношения логической суммы (если его читать сверху) даст в столбце L такую последовательность: 1110. Если перевести это двоичное число в обычное, то получим $1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 8 + 4 + 2 + 0 = 14$. Следовательно, отношение логической суммы мы можем называть еще «отношением № 14». Для логического произведения имеем: $1000 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 8 + 0 + 0 + 0 = 8$. Другими словами, отношение логического произведения может также называться «отношением № 8». Точно так же для отношения антиэквивалентности получим $0110 = 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 6$. Следовательно, логическое отношение эквивалентности можно называть «логическим отношением № 6».

Сколько же всего возможно типов логических отношений, если рассматривать черные ящики с двумя входами и одним выходом? Каждое отношение характеризуется реакцией на четыре комбинации нажатия кнопок и отличается поведением лампочки в ответ на каждую комбинацию. Значит, всего будет столько возможных типов отношений, сколько комбинаций возможно образовать из нулей и единиц в четырех колонках столбца, отражающего результат: $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Следовательно, можно построить 16 типов черных ящиков, представляющих собой 16 типов связей между двумя воздействиями и одним результатом. Мы рассмотрим еще одно из 16 возможных логических отношений.

ЛОГИЧЕСКОЕ ОТНОШЕНИЕ ИМПЛИКАЦИЯ («ЕСЛИ... ТО»)

«Черный ящик», представляющий отношение импликация

Рассмотрим протокол наблюдений за черным ящиком, схема связей внутри которого приводит к осуществлению операции импликация между его входами и выходом. Ящик ведет себя следующим образом: лампочка горит все время за исключением случая, когда кнопка B нажата, а кнопка H — нет. Отношение импликации обозначается стрелкой: $L = B \rightarrow H$.

B	H	L
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Уже известным способом находим двоичный и десятичный номер этой операции: $1011 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 8 + 2 + 1 = 11$.

Теперь, глядя на протокол наблюдений и используя правила, которые нам еще предстоит изучить, можно составить формулу, выражающую отношение импликации через отношение логического отрицания, произведения и суммы. Она состоит из трех слагаемых; $L = B \rightarrow H = B \cdot H + \bar{B} \cdot H + \bar{B} \cdot \bar{H}$.

Поскольку формула дана пока без вывода, удовлетворимся лишь проверкой, что она действительно дает результат 0, когда $B = 1$, а $H = 0$; а в остальных случаях равна 1. $L = B \rightarrow H = 1 \cdot 0 + \bar{1} \cdot 0 + \bar{1} \cdot \bar{0} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 + 0 + 0 = 0$; для $B = 1$ и $H = 1$; $L = B \rightarrow H = 1 \cdot 1 + \bar{1} \cdot 1 + \bar{1} \cdot \bar{1} = 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 + 0 + 0 = 1$ для $B = 0$ и $H = 1$: $L = B \rightarrow H = 0 \cdot 1 + \bar{0} \cdot 1 + \bar{0} \cdot \bar{1} = 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 + 1 + 0 = 1$ для $B = 0$ и $H = 0$: $L = B \rightarrow H = 0 \cdot 0 + \bar{0} \cdot 0 + \bar{0} \cdot \bar{0} = 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0 + 0 + 1 = 1$.

Легко начертить и электрическую схему черного ящика, представляющего собой отношение импликации в соответствии с данной формулой. Эта схема имеет три параллельные цепочки по два последовательных элемента в каждой (по числу букв и связям между ними в формуле). Каждая буква изображает контактную перемычку, связанную с нажатием кнопки B или H отношением утверждения или отрицания (в зависимости от наличия или отсутствия знака «отрицания» над буквой B или H) (рис. 7).

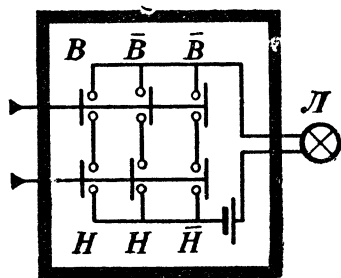


Рис. 7. Внутренняя схема черного ящика, представляющего собой отношение «импликации».

О «специфичности» импликации

Импликация — это одно из многих простейших логических отношений, представляющих собой зависимость однородной двужаночной функции от двух аргументов. Однако никакое другое логическое отношение не привлекало к себе такого внимания, как импликация. О ней больше всего написано книг и трактатов, о ее смысле спорили величайшие умы человечества. Споры эти захватывали иногда широкие круги ученых и просто интересующихся наукой. В Древней Греции по этому поводу было сочинено шуточное стихотворение, в котором есть строки такого содержания: «Даже вороны на крыше каркают: какая же импликация правильна?»

В конце прошлого и начале нашего века, когда математическая логика оформилась как самостоятельная наука, «парадоксальность» импликации была представлена в еще более

подчеркнутой, утрированной форме. Когда же в послевоенные годы, в первую очередь в связи с развитием счетно-решающей техники, а также в связи с распространением методов дискретного моделирования в ряде новых отраслей науки и техники, громадной армии специалистов понадобилось изучать основы математической логики, выяснилось, что, несмотря на блестящие успехи этой науки, в вопросе о смысле импликации почти за две с половиной тысячи лет мало что прибавилось нового. И всякий, кто приступает к систематическому изучению математической логики или просто желает познакомиться с ее основными принципами, не может не почувствовать, что в свойствах импликации есть что-то непознаваемо таинственное. В частности, складывается впечатление, что в оттенках этой таинственности кроется отличие собственно математической логики от традиционной формальной логики (так как многие ученые противопоставляют эти науки, о чем речь еще будет идти особо). Наша задача — развеять эту таинственность и показать, что импликация — столь же естественная разновидность дискретной связи между воздействием и результатом, между элементами в системе, сколь естественны отношения логического произведения или суммы.

Что естественней понимать под отношением «если... то»

У импликации, как и у многих других логических отношений, есть свое название: если... то. Само это название наводит на мысль, что импликация отражает такое положение, когда из чего-то с необходимостью вытекает нечто другое, т. е. что-то является необходимым условием чего-то другого. Это может быть связь причины со своим следствием, воздействия со своим результатом, изменения значения аргумента со значением функции и т. д. Мы уже много говорили о том, что основным методом научного познания действительности является установление системной связи между объектами, явлениями и их составными частями, т. е. выявление структуры отношений в сложных системах. Следовательно, логическое отношение, описывающее связь в терминах если... то, должно играть в научной практике важнейшую роль.

Поэтому не удивительно, что авторы книг по математической логике стараются описать самые разнообразные структуры в первую очередь как цепь импликаций из импликаций.

Если мы обратимся к нашему жизненному опыту, к нашему здравому смыслу, то легко придем к выводу, какая из разновидностей отношений, к которым применимо выражение если...то, наиболее типична, наиболее важна, наиболее вероятна. Мы знаем, что, только идеализируя действительность, мы можем говорить, что некоторая система испытывает за-

данный перечень воздействий и от всех остальных воздействий она полностью изолирована. Реальные же системы, как бы их ни изолировали, рано или поздно испытывают нежелательные воздействия.

Например, как бы мы ни старались изолировать лабораторную комнату от посторонних звуков, время от времени на улице происходят такие события, отзвуки которых все-таки проникают в нее. Следовательно, если мы установили, что какое-то явление обязательно вызывает возникновение другого явления, то мы либо уже знаем, какие другие явления приводят к этому же самому результату, либо, из осторожности, все свои расчеты строим на том, что некое другое неизвестное пока явление, также приводящее к интересующему нас результату, в любой момент может обнаружиться. В терминах системы это убеждение может быть сформулировано так: наиболее типична при исследовании систем такая ситуация, при которой мы устанавливаем влияние изменения состояний одного элемента (испытывающего воздействие) на состояние другого элемента (проявляющего результат), но помним при этом, что такой же результат получается при изменении состояний других элементов, в данной ситуации остающихся вне поля нашего наблюдения.

Выразим эту же мысль в функциональных терминах. Наиболее типичны в реальных системах функции многих аргументов, хотя мы, из соображений простоты процедуры исследования функциональной связи, рассматриваем зависимость функции от одного избранного аргумента; при этом мы не забываем, что остающиеся неучтенными связи функции с другими аргументами не исчезают.

Правда, в некоторых очень специфических условиях бывает удобнее считать, что данное следствие действительно порождается единственной причиной, что данная функция в реальной системе абсолютно изолирована от всех других аргументов, кроме рассматриваемого. Однако совершенно очевидно, что это лишь очень частный, сравнительно редко встречающийся случай, поэтому словами если...то целесообразно описывать именно ситуацию анализа зависимости результата от одного источника воздействия при принципиальном существовании других воздействий, приводящих к тому же результату. Следовательно, импликация есть конструкт для моделирования как раз таких ситуаций, а для их разновидностей слово «импликация» может использоваться лишь с дополнительными поясняющими словами (например, «строгая импликация» для упоминавшегося частного случая, когда рассматривается такой тип взаимосвязи функции с аргументом, при котором наличие других аргументов считается полностью исключенным; однако чаще такой тип связи называют «равнозначностью» или «эквивалентностью»).

Непарадоксальные примеры импликации

При том понимании отношения импликации, которое вытекает не только как возможное, но и как наиболее вероятное, из самого названия функции (если...то), нет оснований ожидать чего-либо парадоксального. Убедимся в этом, рассмотрим простой жизненный пример, в котором связь между наблюдаемыми явлениями описывается таблицей импликации, составленной для черного ящика, изображенного на рис. 7.

Пусть перед нами та же фабрика, с некоторыми сторонами жизни которой мы уже познакомились, и та же ситуация контроля выдачи премий. Разница лишь в том, что речь пойдет о премии за рационализацию. Из министерства пришел приказ: во время очередной выдачи зарплаты поощрить премией всех работников, рационализаторские предложения которых, поданные в течение текущего года, были приняты администрацией. Правление Общества изобретателей решило проверить исполнение этого приказа и послало в день выдачи зарплаты своего представителя проследить, как будут выдаваться премии. Представитель обнаружил следующее: были факты ($\Phi = 1$) невыдачи премий ($\Pi = 0$) нерационализаторам ($P = 0$), были факты ($\Phi = 1$) выдачи премий ($\Pi = 1$) рационализаторам ($P = 1$); были факты ($\Phi = 1$) выдачи премий ($\Pi = 1$) нерационализаторам ($P = 0$), но не было фактов ($\Phi = 0$), чтобы рационализатор ($P = 1$) не получил премии ($\Pi = 0$). Из всего этого было ясно, что приказ о награждении исполняется точно. Из условия (принадлежность к числу рационализаторов) обязательно следует результат (получение премий), хотя этот результат может иметь и другие причины (например, премии за досрочное выполнение плана). Случаи же невыплаты премии рационализаторам, при соблюдении приказа, оказываются невозможными. Ясно, что таблица связи между P , Π и Φ полностью совпадает с таблицей импликации для B , H и L .

P	Π	Φ
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Итак, всякий раз, когда некоторое явление зависит от двух других так, как это изображено в таблице импликации, можно быть уверенным, что второе из этих «двух других явлений» вызывается наличием первого, но не наоборот. Если же

мы только предполагаем наличие такой связи, то для проверки этого нужно составить протокол наблюдений, фиксирующий взаимосвязь того, что, по предположению, является результатом, с тем, что, по предположению, есть следствие.

Отсутствие результата при наличии воздействия свидетельствует о неправильности исходного предположения.

Мы видим, что если в самой исходной системе состояния некоторого элемента P оказываются результатом воздействия на некоторый элемент R (так как между этими элементами существует функциональная зависимость), то для наблюдателя, исследующего отношение импликации и сопоставляющего воздействия с результатами, роль каждого из членов функциональной цепи изменяется. Искомой величиной становится сама предполагаемая средняя часть функциональной цепи — функциональная зависимость, а исходные величины — воздействие и результат — по отношению к наблюдателю превращаются в те два аргумента, по состояниям которых он выявляет результат — заключение о наличии функциональной зависимости в объекте.

Следовательно, в этом случае мы имеем дело с двумя типами результатов: собственно результат в исследуемой системе, зависящий от воздействия, и результат в форме найденной функциональной зависимости, если она обнаружена. Первый из них сам становится одним из воздействий для получения второго результата.

Примеры «парадоксов» импликации

При использовании правил школьной алгебры ученики довольно быстро привыкают к тому, что на место A , B или X можно подставить любое число, от чего справедливость алгебраической формулы не нарушается. Но так как математическая логика не менее, а возможно, и более общая наука, чем школьная алгебра, то естественно ожидать, что в формулы математической логики, в том числе алгебры Буля (т. е. логики двужначных однородных логических функций, с которыми мы знакомимся), также можно подставлять любые конкретные значения, т. е. конкретные высказывания. Однако при практической попытке подстановки любых высказываний в логические формулы сразу же возникают парадоксы, с которыми обычно призывают мириться, но которые все-таки трудно воспринять, если человек привык стремиться к ясности понимания того, чему его обучают.

В наших примерах, как это принято в инженерных книгах по логике, мы приписываем логическим отношениям два значения в виде 1 и 0. Однако в теоретических трудах и учебниках математической логики, опирающихся на традиции, восходящие к трудам Аристотеля, предпочитают пользовать-

ся значениями «истинно» и «ложно» (*И* и *Л*). Когда мы рассматриваем примеры, мы обязательно вначале уговариваемся, на основании каких критериев состоянию логической переменной приписывается значение 1 или 0. Но когда пользуемся значениями «истинно» и «ложно», то начинает казаться, что нет нужды специально оговаривать, истинно или ложно высказывание: это ведь понятно из самого смысла высказывания!

Например, понятно, что « $2 \cdot 2 = 4$ », «Волга впадает в Каспийское море», «розы приятно пахнут», — все это истинные высказывания, а « $2 \cdot 2 = 5$ », «Волга впадает в Ледовитый океан», «тухлая рыба приятно пахнет» и т. п. — все это ложные высказывания. Но каждое высказывание может войти, в качестве независимого переменного, в логическую функциональную цепь. Следовательно, имея вполне определенное и независимое логическое значение («истинностное значение»), оно определит истинностное значение всего совокупного высказывания.

В результате такой подстановки в формулу импликации мы, например, получим следующие комбинации:

1. Если $2 \cdot 2 = 4$ (*И*), то розы приятно пахнут (*И*),
2. Если $2 \cdot 2 = 4$ (*И*), то тухлая рыба приятно пахнет (*Л*),
3. Если $2 \cdot 2 = 5$ (*Л*), то розы приятно пахнут (*И*),
4. Если $2 \cdot 2 = 5$ (*Л*), то тухлая рыба приятно пахнет (*Л*).

Поскольку каждая из фраз состоит из двух высказываний, соединенных союзами *если...то*, а значение истинности составляющих высказываний заранее известно, то нам ничего не остается другого, как рассматривать эти фразы как одну из реализаций отношения импликации и поэтому считать, что сложные предложения 1, 3 и 4 истинны, а предложение 2 ложно (так как в нем из «истинности» первого члена вытекает «ложность» второго).

Примеры подобного типа приводятся в книгах по логике уже у Хризиппа (III в. до н. э.). Однако совершенно ясно, что даже самую безобидную из этих фраз «Если $2 \cdot 2 = 4$, то розы приятно пахнут», невозможно, без насилия над здравым смыслом, назвать «истиной». Ведь она демонстрирует проявление той самой логики, которая так образно высмеяна в народной поговорке «В огороде бузина, а в Киеве дядька». Естественно, что теоретики и популяризаторы математической логики не могут не замечать этого и стараются доказать, что, несмотря на абсурдность таких импликаций, формально они не абсурдны. На чем же основываются эти доказательства? Рассмотрим наиболее типичные.

1. Истинностные таблицы (например, рассмотренные нами таблицы логического произведения, суммы и импликации) заданы абсолютно произвольно, поэтому искать в них некий смысл, понятный с точки зрения обычного мышления, занятие

бессмысленное. «Построение логики с помощью постулированных истинных таблиц освобождает логику от цепей, в которых ее держит привычное мышление ...» — заявляет Р. Л. Гудстейн в своей книге «Математическая логика». А если так, то всякий протест, основанный на критериях привычного мышления, должен быть оставлен, и наша задача — лишь запомнить произвольные истинностные таблицы, а не задавать кощунственный вопрос, что же такое истина, и если в таблицах под этим словом понимается что-то другое, то что именно. Эта же мысль проводится в книге Ю. А. Шихановича.

2. П. С. Новиков в книге «Элементы математической логики» вместо «привычного мышления» говорит о «распространенном понимании», которое потому может расходиться с «логическим», что его нельзя сформулировать «только в терминах истины и лжи».

После таких пояснений тоже остается неясным, что же тогда понимается под истиной и ложью в математической логике.

3. В фундаментальном труде А. Черча «Введение в математическую логику» мы также находим примечания относительно истинности импликации. «Если читатель склонен подвергать сомнению истинность, скажем, предложения (имеется в виду предложение, аналогичное предложению 3 в нашем примере. — Г. М.) на том основании, что между Видкуном Квислингом и розовым маслом нет никакой связи, то это значит, что он понимает выражение «если... то» не в материальном смысле, а в каком-либо ином». Здесь под «иным» нужно снова понимать «привычное», «распространенное» и тому подобное мышление, а под «материальным» — особое логическое, критериев которого, по существу, также не дается.

4. Л. А. Калужнин в популярной книге «Что такое математическая логика» говорит о необходимости помнить, что союз если... то имеет в обычной речи много значений, и поэтому его лучше не употреблять в логических высказываниях, а просто говорить «а имплицитно б» и понимать операцию импликация «только так, как это установлено соответствующей таблицей истинности». После этого смысл слова «истинность» становится еще менее понятным.

5. Интересное объяснение (а скорее, оправдание) дает «парадоксальным» логическим цепочкам А. Гжегорчик. В книге «Популярная логика» он пишет: «В умозаклчениях повседневной жизни и в науке мы пользуемся только такими импликациями, в которых предыдущий и последующий члены связаны по содержанию...». «Импlicationи же, в которых нет этой связи, вообще не имеют значения в умозаклчениях».

Оказывается, в конце концов, что между повседневной жизнью с ее здравым смыслом и научным мышлением все-

таки нет той пропасти, существование которой явно предполагается, когда приводятся парадоксальные импликации! Именно потому и становится возможным составлять эти схоластические парадоксы, что в научной практике они совершенно не страшны, так как никогда не встречаются. После этого признания простому человеку уже не так стыдно за свое обычное мышление, однако остается неясным, зачем же в математической логике так упорно настаивают на необходимости довольно странного определения истинности импликации (да и других логических отношений). К этому вопросу мы и переходим.

Два пути преодоления парадоксов импликации

Чтобы выявить причины связанных с импликацией парадоксов, нужно обратиться к нашим исходным понятиям системы, структуры, модели и функции.

Вводя определение функции, мы подчеркивали чисто структурный характер функциональной зависимости. Это значит, что рассматриваем ли мы связь функции с аргументами непосредственно в некоторой реальной физической системе, т. е. на уровне наблюдения, или же оперируем с конструктом, т. е. со структурной моделью этой системы — и в том, и другом случае мы интересуемся только структурой связи между элементами или состояниями элементов системы как в оригинале, так и в модели. Следовательно, если нас интересуют проявления логических отношений, мы можем найти их и в оригинале и в модели. В частности, если мы выявляем скрытые от прямого наблюдения связи между элементом, испытывающим воздействие, и элементом, проявляющим результат (что абсолютно необходимо, если нас интересует структура), то совершенно безразлично, разглядываем ли мы непосредственно оригинал или его модель. Всякий раз, на основе «привычного», «распространенного» здравого смысла мы сможем убедиться в существовании этой связи: если нет таких случаев, что при наличии воздействия результат отсутствует, то искомая связь между элементами существует. При этом само собой разумеется, что хотя для определения состояний элементов, испытывающих воздействие, и элементов, проявляющих результат, используются только двузначные дискретные индикаторы (так как мы интересуемся пока лишь объектами Булевой алгебры), конкретная природа этих индикаторов должна быть различной, в зависимости от того, какую именно систему или какую структурную модель мы исследуем. Поэтому, когда объектами являются реальные ситуации и связи между ними и мы оцениваем истинность этих ситуаций и связей, критерии (т. е. индикаторы) истинности должны быть также заранее строго сформулированы.

Мы же видели, что парадоксальность высказываний, связанных отношением импликации, возникает именно тогда, когда значение истинности составляющих высказываний определяется не на основании строго сформулированных критериев, а на «очевидной» истинности членов импликации. Таким образом, получается явная непоследовательность: критерием истинности составных элементов служит тот самый здравый смысл, который тут же объявляется непригодным для рассмотрения логических отношений, как только он начинает протестовать против объединения в одном сложном высказывании двух простых, не связанных между собой по смыслу. Следовательно, путь к избежанию парадоксов импликации лежит в соблюдении единства принципов определения как истинности составляющих высказываний, так и результирующего высказывания. Либо это только обычный здравый смысл, либо что-то другое. Оставив пока это «что-то другое», вспомним, чем объясняет польский логик А. Гжегорчик «безобидность» парадоксальных импликаций. Оказывается, что не только в обиходной жизни, но и в сугубо теоретических логических исследованиях практически рассматриваются только те импликации, составные части которых связаны по смыслу, т. е. используют критерий здравого смысла не только при оценке истинности каждого элемента импликации в отдельности, но и при оценке естественности самой импликационной связи между элементами в составном высказывании.

Однако этот факт не исчерпывает вопроса. Если признать, что математическая логика имеет право рассматривать лишь импликации, с очевидностью состоящие из связанных по смыслу элементов, а истинность каждого из элементов вытекает также непосредственно из их смысла, то станет ясно: из всего безграничного моря высказываний математическая логика обязана ограничиться рассмотрением лишь удовлетворяющих принципу очевидной осмысленности. В обычной алгебре никаких подобных ограничений на подстановку чисел в формулу не накладывается. Следовательно, мы должны вроде бы признать, что математическая логика, в частности алгебра логики, не столь общая наука, как, например, алгебра чисел.

Однако если не общетеоретические положения, то хотя бы накопившийся опыт показывает, что не возникало таких ситуаций, когда логику нельзя было бы применить к анализу любых дискретных систем именно по причине ее неуниверсальности при определении значений логических переменных.

Таким образом, мы приходим к выводу, что математическая логика должна рассматривать и внешне не связанные по смыслу высказывания; но тогда и при определении истинности составных элементов высказывания нужно пользоваться математически строго сформулированными критериями истинности, а не банальными универсальными сведениями о

том, что «Волга впадает в Каспийское море». При таком подходе окажется, что в конечном счете здравый смысл и только здравый смысл служит критерием логичности, правильности, непротиворечивости сложной дискретной системы, структуру которой приходится часто изучать как внутренность закрытого черного ящика.

Но это не такой здравый смысл, который основан лишь на примитивной очевидности, на ссылке, что «все так думают, все об этом говорят». Наш здравый смысл способен приоткрывать завесы неочевидного, замечать не только то, что лежит на поверхности явления. Именно такой здравый смысл и позволяет найти второй путь избавления от парадоксов импликации.

Сущность второго пути

Математическая логика, по нашему определению (далеко не общепризнанному), — наука о дискретном моделировании дискретных конечных систем. Следовательно, системы, состоящие из высказываний, это лишь частный случай объектов математической логики. Когда мы рассматриваем такие, например, дискретные объекты, как контактные схемы, то ни импликация, ни любые другие логические отношения не проявляют никакой парадоксальности. Возникает она лишь тогда, когда дискретным состояниям элементов исследуемых систем приписываются состояния «истинно-ложно». Следовательно, нужно рассмотреть более внимательно, в чем заключается специфика подобных систем и как определяются эти состояния. Данные объекты — чисто логические, т. е. имеющие отношение к человеческому сознанию и мышлению. Поэтому следует обратить внимание на то, что сознание (если пользоваться нашими понятиями) — это прежде всего структурная модель внешней действительности, воплощенная в сети взаимосвязанных нейронов.

Мышление при таком понимании — это процесс установления соответствия между структурой связи объектов действительности и структурой связи отражающих эти объекты нейронов, т. е. непрерывный процесс подстройки структурной модели для установления ее максимального соответствия структуре оригинала. Но это соответствие может быть (и, как правило, является) не абсолютным. Особенно большое расхождение между структурой, отраженной в сознании, и структурой в оригинале (т. е. в самой действительности) возможно тогда, когда речь идет о сознании конкретного человека.

Когда мы анализируем истинность сложного высказывания, то необходимо помнить, что эти высказывания могут относиться к двум планам: считаем ли мы их словесным описанием непосредственно плана действительности (т. е. неко-

торой реальной сложной системы, находящейся вне человека), либо мы анализируем лишь модель этой системы, отраженной в сознании конкретного человека. Фактически логика, в ее узком понимании как науки о законах мышления, должна интересоваться только задачами второго типа. Следовательно, и при определении связанности или несвязанности двух высказываний по их смыслу, и при определении истинности каждого элемента высказывания логика должна исходить из конкретных свойств рассматриваемого объекта (т. е. из знаний и представлений человека, логичность мышления которого исследуется). При этом, в большинстве случаев, результаты будут такими же, какие получились бы, если оценивать высказывания как отражение реальных свойств действительности на уровне наблюдения.

Однако, поскольку нас интересует наиболее полное и общее понимание смысла и возможностей математической логики и вообще математики, мы не должны забывать, что структура оригинала и его модели могут иметь несоответствия. И если мы при проверке структуры модели пользуемся информацией о состоянии элементов модели, полученной не на основе ее непосредственного исследования, а на основе обращения к состояниям оригинала, то принципиально наши выводы о функционировании модели могут оказаться неверными, абсурдными. Именно в таком положении мы оказываемся, когда об истинности составных элементов мы судим на основании представления о действительности, а выводы делаем о работе некоторой конкретной модели этой действительности — об отражении действительности в сознании. При этом и возникают парадоксы.

Если же мы будем помнить, что, анализируя собственно логическую задачу, мы имеем дело только с отражением, только с моделью, то станет понятно, что требование общности обязывает нас рассматривать сочетания любых высказываний. Ведь принципиально не исключена такая ситуация и такие знания конкретного человека, когда с позиций объективно изученных свойств действительности между ее объектами и элементами невозможна рассматриваемая связь, однако с точки зрения этого человека связь считается существующей. А поскольку логика интересуется в первую очередь именно структурой мыслительного процесса, а не его содержанием, то главная задача логики при анализе умозаключений — установить, правильно ли связано выведенное знание из заданного исходного знания, независимо от того, правильно ли исходное знание моделирует действительность.

Из такого понимания истинности сложного высказывания следует, что «классические» парадоксы импликации не только естественны, но даже не реализуют до конца возможности своей внешней парадоксальности. Они отражают лишь такие

случаи, когда некий конкретный ум связывает по смыслу пару высказываний, несочетаемых с точки зрения большинства людей, однако при определении истинности каждого элемента импликации он солидарен с мнением большинства. Но мы, опять же по соображениям общности, должны исходить из того, что и при оценке истинности элементов имплицативной связи данный человек также может иметь свое, оригинальное, не совпадающее с общим мнением. Таким образом, возможна сверхпарадоксальная импликация. Однако если человек, произведя свои оригинальные оценки, начинает мыслить и не путает, в рамках своего сознания, что у него находится «взаимосвязи, а что не взаимосвязано, то мышление этого человека остается логичным.

Когда же анализируется любая конкретная дискретная система, а не ее мыслительная модель, то условия для появления логических парадоксов вообще исчезают, так как в этом случае при определении состояний логических переменных исследователь имеет дело с единственным объектом, и неконтролируемые перескоки с объекта на модель и обратно практически исключаются.

Примеры «сверхпарадоксальных» импликаций

Предлагаются следующие сложные высказывания с их оценками истинности:

1. Если наконечник копья каменный (*И*), то соседи кипят воду, бросая в нее лед (*И*).

2. Если наконечник копья каменный (*И*), то соседи кипят воду на костре (*Л*).

3. Если наконечник копья металлический (*Л*), то соседи кипятят воду, бросая в нее лед (*И*).

4. Если наконечник копья металлический (*Л*), то соседи кипятят воду на костре (*Л*).

Совершенно очевидно, что эти сложные высказывания, во-первых, состоят из элементов, не связанных по смыслу, и, во-вторых, значения истинности, с точки зрения классических примеров парадоксов импликации, приписаны второму элементу «неправильно». Тем не менее мы беремся утверждать, что эти четыре фразы представляют собой отношение импликации и что как значения истинности, так и общая связь между элементами по смыслу не абсурдны. Для этого мы должны только описать ситуацию, где такой набор фраз демонстрирует правильность, логичность мышления человека.

Представим себе деревушку в джунглях Западного Ириана. Всего два-три года назад жители ее впервые увидели людей «с другой Земли», приплывших вверх по реке на «большой лодке без весел». С тех пор люди «в лодке без весел» приплывают не реже, чем раз в месяц, и привозят

очень нужные вещи. Так жители селения узнали, что такое металл, и заменили каменные наконечники копий металлическими. Такие копья лучше поражают зверя. Кроме того, жители поселка приобрели металлические котлы, и теперь варить пищу стало легче. Раньше ее обычно жарили на огне, и только к особо торжественным дням варили праздничные кушанья в корзинах, обложенных пальмовыми листьями, бросая в воду раскаленные в костре камни.

Все эти перемены в жизни поселка протекали на глазах ирианского мальчика, о котором пойдет дальше рассказ. Кроме жителей своей деревни и тех, кто приплывает в «лодке без весел», мальчик не видел других людей. Но от взрослых он слышал, что в нескольких днях ходу от их селения, в глубине острова, есть еще одно селение. Там тоже живут охотники и говорят они почти так же, как настоящие люди, т. е. жители родного селения. Но то селение стоит не на ровном месте, а у горы. Гора, как объяснили мальчику, это большой-большой холм, до самых туч, и там, где ходят тучи, леса нет. Но и земли тоже нет, а есть лед, который так ярко блестит, что смотреть на него больно. Сам мальчик никогда не видел льда. На вопрос, что это такое, ему сказали, что лед — это такой светлый камень, который в руках держать нельзя. «А почему нельзя?» — спросил мальчик. Ему объяснили, что держать лед в руках больно, потому, что он обжигает руки. «Поэтому он так ярко и блестит», — подумал мальчик.

Как-то однажды охотники селения принесли убитого копьями кабана. Когда стали разрезать тушу и вынимать глубоко застрявшие в мышцах копья, мальчик увидел, что у одного копья наконечник каменный. «Почему у этого копья наконечник не металлический, а каменный?» — спросил мальчик у охотников. Они ответили, что этого кабана ранили охотники горной деревни. Но кабан не умер, а прибежал с копьём в боку к их селению, где его и доби́ли.

Глядя на это копьё, мальчик вдруг догадался, что в горной деревне люди живут не совсем так, как у них. Во-первых, раз они до сих пор охотятся копиями с каменными наконечниками, то, значит, люди с «лодки без весел» еще не принесли в горную деревню металл. А раз так, то в горной деревне нет до сих пор и металлических котлов, и воду они кипятят в корзинах, обложенных пальмовыми листьями. Правда, воду им кипятить легко — ведь костры там разжигать не обязательно: на горе есть лед, который блестит так, что смотреть на него больно, и в руках держать больно, потому что он обжигает руки. Значит, этот странный обжигающий камень, который называют словом «лед», можно прямо бросать в корзину с водой, и она нагреется и закипит. Интересно живут жители в горной деревне!

Обо всем этом подумал маленький ирианец, увидев, что

копье соседей имеет не металлический, а каменный наконечник. И хотя все рассуждения мальчика основывались на недостаточном знании жизни и просто на недоразумениях, однако едва ли кто посмеет сказать, что этот мальчик не наделен наблюдательностью и способностью строго логично мыслить. Кто знает, может быть, лет через 20—30 он станет логиком, знаменитым не только в Западном Иране.

Таким образом, даже такая импликация, как «если наконечник копья каменный, то соседи кипятят воду, бросая в нее лед», тоже может быть образцом проявления здравого смысла и логичности, и не рассматривать ее в рамках математической логики было бы неверно.

После всего сказанного вы, по-видимому, уже убедились, что не только импликация, но и любое другое логическое отношение может стать примером парадоксальности. Убедились вы и в том, что эта парадоксальность исчезает, как только мы сформулировали своеобразие ситуации, с позиций которой оцениваются как значения, так и связанность логических элементов сложного высказывания. При этом совсем не обязательно, чтобы своеобразие заключалось в недостаточной осведомленности того, кто связывает между собой рассматриваемые элементарные высказывания. Оно может выражаться в специфичности конкретного индикатора, конкретного критерия приемлемости, которые лучше всего никак не ассоциировать с таким частным критерием, как «истинность — ложность», даже если высказывания рассматриваются не как элементы сложной дискретной системы, а как объекты собственно логики — науки о мышлении. Поясним это примером.

Дано четыре сложных высказывания:

1. Майские грозы — яркие розы.
2. Майские грозы — яркие маки.
3. Майские зори — яркие розы.
4. Майские зори — яркие маки.

Вы не должны удивляться, если будет заявлено, что это пример логического произведения — конъюнкции. Вы просто должны спросить: «А на основании какого критерия? На основании возможности рифмовки? Тогда, конечно, это конъюнкция. Ведь только первое сложное высказывание удовлетворяет критерию рифмы. Поэт, который рассматривает этот перечень сложных высказываний как конъюнкцию, мыслит логично. Но с точки зрения критерия... (и вы приводите другой возможный критерий) — это уже не конъюнкция, а логическое отношение номер... На первый взгляд, это тоже могло бы показаться парадоксальным!»

На этом мы заканчиваем достаточно детальное рассмотрение некоторых из типов логических отношений. Всего таких отношений, как мы уже определяли, существует 16, если рассматривать и функции одного аргумента и логические кон-

станты как частный, «вырожденный» случай функций, двух аргументов. На таблице 1 перечислены все эти 16 типов отношений. Они представлены в табличной форме, в цифровой (т. е. с указанием номера отношения), а также в контактной интерпретации и в виде так называемых импульсно-потенциальных диаграмм. Приведены условные знаки этих отношений и существующие их словесные названия. Как нетрудно понять, обилие названий для каждого из логических отношений свидетельствует о том, что терминология в литературе по математической логике еще далеко не устоялась. Поэтому приведенная сводная таблица может быть полезной, например, в том отношении, что облегчит пользование литературой по математической логике, написанной разными авторами.

ОСНОВНЫЕ «ЗАКОНЫ» АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Перечень основных законов и их смысл

После того как мы научились выявлять простейшие структурные схемы содержимого черных ящиков, необходимо напомнить, что один и тот же протокол наблюдений может быть получен от многих вариантов схем. Некоторые из них будут содержать больше элементов, другие — меньше. Следовательно, одному и тому же черному ящику может соответствовать большое количество логических формул, и практический интерес представляет вопрос, как из сложной логической формулы получить более простую, но обладающую такими же свойствами (с точки зрения воздействий и результатов), что и сложная.

В математической логике разработаны приемы замены одних частей формулы другими, равноценными им по результатам.

Перечень таких взаимозамен называется «законами», и сейчас мы перейдем к рассмотрению этих законов в пределах алгебры логики (алгебры Буля), первого раздела математической логики. Будем пользоваться не формальными доказательствами теорем, а рассмотрением наглядных дискретных контактных схем и соответствующих жизненных ситуаций.

1. $\bar{\bar{A}} = A$. Двойное отрицание равносильно утверждению. «Контакт не незамкнут» — значит, он замкнут. Или: если $\bar{1} = 0$, а $\bar{0} = 1$, то $\bar{\bar{1}} = \bar{0} = 1$; $\bar{\bar{0}} = \bar{1} = 0$.

2. $A \cdot B = B \cdot A$, т. е., если, например, поменять в последовательной цепи контакты местами, то все равно ток потечет лишь тогда, когда нажаты обе кнопки. По этой же причине очевидно, что:

3. $A + B = B + A$, т. е. ток потечет по цепи при условии,

югда нажата хотя бы одна из кнопок, как бы мы ни переставляли параллельные цепи из таких кнопок.

4. $A + A = A$. Две параллельно включенные кнопки при их общем нажатии ведут себя точно так же, как одна кнопка, т. е. (рис. 8) схема *а* равноценна схеме *б*. (На всех рисунках для простоты одной и той же буквой обозначена и кнопка и все связанные с ней контактные перемычки. Отличается только тип связи — утверждение или отрицание, что проявляется в том, прижимается ли контактная перемычка к контактам при нажатии ее кнопки или отходит от них.)

Аналогичная ситуация из жизни: если мне сообщили какую-то новость, то сколько бы человек мне ее ни сообщали снова, результат будет такой же, как если бы сообщил всего один человек.

5. $A + 0 = A$. 0 — это логическая константа, например навсегда разомкнутый (скажем, сломанный) контакт, не зависящий элемент системы в состоянии 0. Тогда неважно, стоит он параллельно A или нет, на результате это не скажется, и лампочка будет гореть или не гореть лишь в зависимости от состояния контактной перемычки A (рис. 8, в);

6. $A + 1 = 1$. 1 — это тоже логическая константа, например, такой контакт, который постоянно замкнут, после того, как он подгорел и припаялся (т. е. независимый элемент системы в состоянии 1). Тогда ток по цепи через этот контакт будет течь постоянно, независимо от состояния контактной перемычки A (рис. 8, г).

7. $A \cdot A = A$. Последовательная цепь из двух кнопок, нажимаемых и отпускаемых одновременно, ведет себя так же, как цепь из одной кнопки (схема рис. 8, д равноценна схеме рис. 8, е).

Например, если перебои как в трамвайном, так и в троллейбусном движении возникают только при выключении электроэнергии в городе, то как

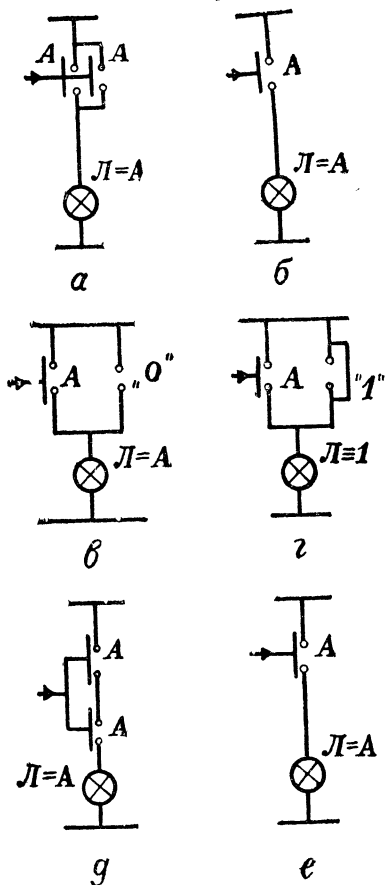


Рис 8 а, б, в, г, д, е.

я, добираясь до работы сначала трамваем, потом троллейбусом, так и мой товарищ, который ездит до работы только трамваем, опаздываем на работу из-за неполадок на транспорте в одни и те же дни.

8. $A \cdot 0 = 0$. Это значит, что если в последовательной цепи есть постоянный разрыв (0), то независимо от нажатия или ненажатия контакта A ток в цепи не течет (рис. 9,а).

9. $A \cdot 1 = A$. Если в последовательной цепи один контакт постоянно замкнут, то ток в ней зависит только от положения другого контакта (рис. 9,б).

10. $A + \bar{A} = 1$. Если всякий раз при размыкании одного параллельного контакта второй замыкается, то цепь всегда остается замкнутой (рис. 9,в).

Если я решил пойти гулять, когда дождя не будет или когда дождь будет, то ясно, что гулять я пойду обязательно, независимо от дождя.

11. $A \cdot \bar{A} = 0$. Если при замыкании одного последовательного контакта второй размыкается, то цепь всегда остается разомкнутой (рис. 9,г).

Или: если ребенок может пойти гулять лишь тогда, когда ему разрешают и мама, и папа, но мама всегда запрещает тогда, когда разрешает папа, и папа запрещает тогда, когда разрешает мама, то ребенок никогда не имеет возможности погулять.

12. $A(B + \bar{B}) = AB + A\bar{B}$. Это правило раскрытия скобок, как в обычной алгебре. Справедливость этого равенства легко проверить на сравнении схем рис. 10а и б.

Пример: 1) Мальчик пойдет в кино, если будет детский сеанс (A) и мама (B) или папа (\bar{B}) дадут деньги на билет. 2) Мальчик пойдет в кино, если будет детский сеанс и ему даст деньги на билет мама (т. е. $A \cdot B$), или же если будет детский сеанс и ему даст деньги на билет папа ($A \cdot \bar{B}$). Очевидно, что условия 1 и 2 с точки зрения конечного результата совершенно равноценны.

Следовательно, когда это нужно, в логических формулах можно как раскрывать скобки, так и выносить одинаковые члены за скобки.

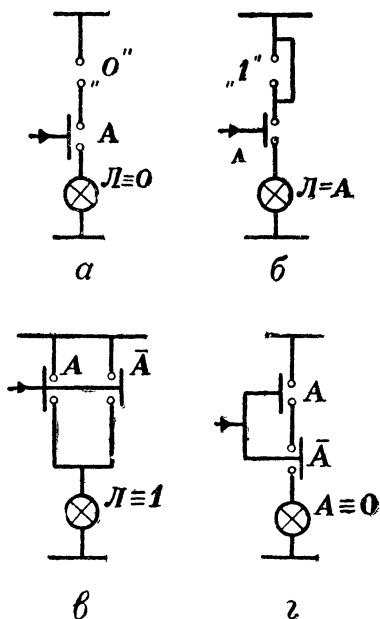


Рис. 9, а, б, в, г.

13. Если рассмотренное правило внешне совпадает с обычным правилом раскрытия скобок, или, наоборот, вынесения за скобки одинаковых сомножителей, то следующее правило, в котором утверждается аналогичная связь, но операции ло-

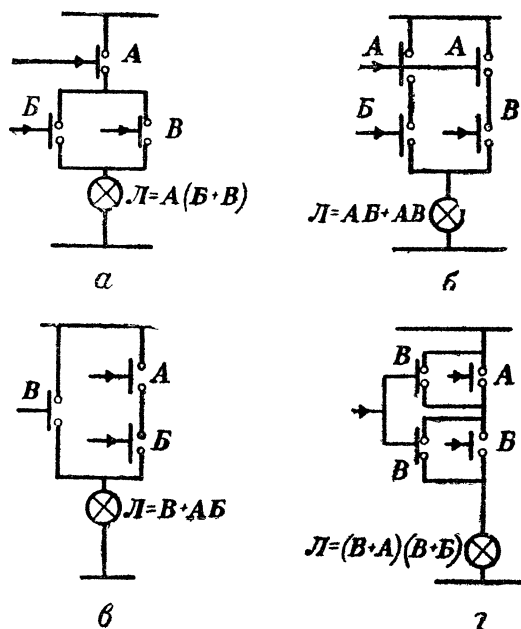


Рис. 10. а, б, в, г.

гического умножения и логической суммы поменялись местами, не имеет прямой аналогии с обычной количественной алгеброй;

$$B + (A \cdot B) = (B + A) \cdot (B + B);$$

$$(A \cdot B) + B = (A + B) \cdot (B + B).$$

Но на контактной схеме правильность этого закона очевидна: если мы замыкаем параллельным контактом В некоторую последовательную цепь $A \cdot B$, то подключение параллельных контактов к каждому из последовательных дает такой же результат, т. е. (рис. 10) схема в равноценна схеме г.

14. $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$. Внешне это правило можно выразить так: если имеется произведение и над ним стоит общее отрицание, то можно заменить знак произведения на знак суммы, если отрицание «разорвать», поставив его отдельно над каждым членом суммы.

Физический смысл этого правила очевиден. Например, если цепь имеет два последовательных контакта и проводит

ток лишь когда нажаты кнопки А и Б (т. е. когда и А, и Б = 1), то цепь не проводит ток, когда не нажата либо одна (т. е. А), либо другая (т. е. Б) кнопка, либо они обе вместе (т. е. и А, и Б).

Или: если мальчик ходит гулять, когда ему разрешают и папа, и мама, то не ходит, когда ему не разрешили или папа, или мама, или оба родителя.

Этот очевидный закон в математической логике имеет особое название: закон де Моргана.

15. Не будем специально рассматривать примеры и для другого варианта закона де Моргана, так как смысл его очевиден:

$$\overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B}.$$

Сформулировать это правило можно так: если имеется общая черта отрицания над несколькими членами в виде суммы, то эту черту можно «разорвать» и поставить отрицание отдельно над каждым членом, но при этом знаки логической суммы сменить на знаки логического произведения.

16. Если вспомнить наше правило № 1, т. е. что $\bar{\bar{A}} = A$, и совместить его с правилом 14 и 15, то получим:

$$1. \overline{A \cdot B} = A \cdot B = \overline{\bar{A} + \bar{B}};$$

$$2. \overline{A + B} = A + B = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}.$$

Нормальная дизъюнктивная форма логической функции

После того как изложены основные законы алгебры логики, мы можем преобразовывать некоторое сложное логическое выражение путем подстановки эквивалентных выражений в другое выражение. А так как определенные сочетания логических переменных эквивалентны нулю или одному переменному, то с помощью преобразований сложных логических формул можно найти более простые их варианты, равноценные с точки зрения связи воздействий с результатами. Однако прежде чем преобразовывать логическое выражение, необходимо уметь его получать. Исходной информацией для записи зависимости некоторой логической функции от заданных аргументов может служить протокол наблюдений за реальным или синтезируемым черным ящиком, или, что то же самое, «истинностная таблица» данной функции.

Рассмотрим, как на основании протокола наблюдений написать формулу хотя бы одной из возможных структур, скрытых в черном ящике. Ведь до сих пор мы пользовались уже найденными формулами и лишь проверяли, что они соответствуют протоколу наблюдений.

Так как функция — это некоторый элемент системы, со-

стояния которого зависят от состояний других элементов, то записать выражение для функции — это сформулировать условия, при которых ее состояние равно 1, так как из этого автоматически следует, при каких условиях ее состояние равно 0. Такое описание исчерпывающе, так как мы рассматриваем Булевы функции, у которых кроме состояний 1 и 0 никаких других быть не может. Что же является условием перехода функции в то или иное состояние?

Как ясно из самого содержания понятия функции, условиями являются те или иные комбинации состояний ее аргументов. Следовательно, если мы перечислим те комбинации состояний аргументов, при которых функция равна 1, то функция будет описана полностью. А каковы эти комбинации, мы можем видеть из таблицы. Глядя на нее, мы, собственно, заключаем: функция принимает значение 1, когда аргументы имеют или такую, или такую, или такую комбинацию состояний. Следовательно, остается только переписать в логической форме эти комбинации, соединив их знаком логического отношения «или». Правда, тут встает вопрос, какое использовать «или»: знак обычной дизъюнкции или же знак антиэквивалентности («исключающей дизъюнкции»)? Вопрос этот решается следующим образом.

Каждый аргумент может иметь в конкретном случае лишь одно из своих состояний. Следовательно, когда аргументы представляют собой определенную комбинацию состояний, они не могут одновременно представлять собой какую-либо иную комбинацию. Однако даже если бы они могли принимать такие значения, при которых сразу получалось бы несколько из перечисляемых комбинаций, то значение функции от этого не изменилось бы, оно все равно было бы равно 1. Таким образом, мы не можем сказать, что данная функция принимает значение 1, когда есть такая комбинация или другая комбинация, но не обе вместе, так как одновременное их появление допустимо (хотя и не может возникнуть по причине особой связи между самими аргументами, но не аргументов с функцией). Поэтому комбинации состояний аргументов следует связывать отношением дизъюнкции (логической суммы), а не антиэквивалентности. Итак, пусть у нас имеется протокол наблюдений за связью воздействия с ре-

<i>B</i>	<i>H</i>	<i>Л</i>
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

зультатом (т. е. «истинностная» таблица), например, таблица импликации.

Смотрим, при каких значениях B и H функция L имеет значение 1. Соответствующие комбинации значений записываются в общем виде: если в таблице B или H равно 1, то в комбинации знаки B или H записываются в форме «утверждения» (т. е. как B или H); если же значение их равно 0, то в форме «отрицания» (т. е. как \bar{B} или \bar{H}).

Именно таким способом для рассматриваемой импликации была ранее получена уже знакомая нам формула: $L = B \rightarrow H = BH + \bar{B}H + B\bar{H}$. Комбинация $B\bar{H}$ отсутствует, так как при такой комбинации состояний B и H функция $L = 0$. Подобная запись логической функции в виде цепочки дизъюнкций из комбинаций значений ее аргументов (причем сами комбинации представляют собой конъюнкцию возможных состояний аргументов), называется нормальной дизъюнктивной формой записи логической функции. Эта нормальная форма (она не единственна, но другие мы рассматривать не будем) и может служить основой для поиска более простых вариантов записи данной функциональной зависимости, т. е. для поисков других, более простых вариантов внутренних структур черного ящика, соответствующих имеющемуся протоколу наблюдений.

Пример применения основных законов при поиске простого варианта структуры с заданными свойствами

Поскольку перечисленные ранее законы алгебры логики совершенно очевидны с точки зрения нашего опыта, то при небольшой тренировке по упрощению логических формул они хорошо запоминаются. Для примера мы покажем, что черный ящик, представляющий собой логическую операцию импликации, может иметь более простую формулу и схему, чем та, которую мы получили как нормальную дизъюнктивную формулу. Для этого к формуле, представленной в виде комбинации операций логического отрицания, суммы и умножения, применим некоторые из наших перечисленных шестнадцати правил.

Итак, исходная формула для импликации была такой:

$$L = B \rightarrow H = BH + \bar{B}H + B\bar{H}.$$

Применим, например, правило 12 и вынесем во втором и третьем слагаемом общий член \bar{B} за скобки:

$$B \rightarrow H = BH + \bar{B}(H + \bar{H}).$$

Но такая скобка, на основании правила 10, всегда равна 1. Следовательно, $B \rightarrow H = BH + \bar{B} \cdot 1$. По правилу 9 получаем, что $\bar{B} \cdot 1 = \bar{B}$. Значит, $B \rightarrow H = (B \cdot H) + \bar{B}$, или, что то же самое (по правилу 3), $B \rightarrow H = \bar{B} + (B \cdot H)$. Как видим, формула стала значительно проще. Однако упрощение можно продолжить. Воспользуемся правилом 13 и внесем слагаемое в скобку. Получим:

$B \rightarrow H = (\bar{B} + B) \cdot (\bar{B} + H)$. Но по правилу 10 первая скобка равна 1, значит, $B \rightarrow H = 1 \cdot (\bar{B} + H)$, или, учтя правило 9, получаем окончательно: $B \rightarrow H = \bar{B} + H$. Таким образом, если нормальная дизъюнктивная форма выражения для импликации, содержала 6 членов и требовала для своего воплощения 6 контактных перемычек на 2 кнопки, то теперь осталось всего 2 члена формулы, а в схеме понадобилось по одной контактной перемычке на кнопку. Проверив полученную сумму при всех значениях B и H , получаем таблицу протокола и убеждаемся, что и более простая формула дает знакомое отношение импликации.

Следовательно, для представления этого отношения можно построить черный ящик со схемой всего с двумя контактными перемычками.

B	H	$B + H$
1	1	$\bar{1} + 1 = 0 + 1 = 1$
1	0	$\bar{1} + 0 = 0 + 0 = 0$
0	1	$\bar{0} + 1 = 1 + 1 = 1$
0	0	$\bar{0} + 0 = 1 + 0 = 1$

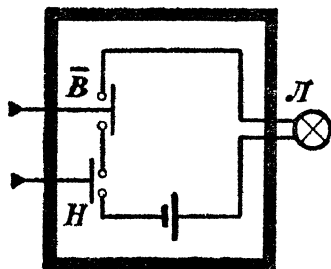


Рис. 11. Одна из простейших схем черного ящика, представляющего собой логическое отношение «импликация».

Пример использования алгебры логики для описания грамматических правил

Всевозможные «правила», которых так много в грамматике любого языка, свидетельствуют о том, что и составные части языка комбинируются не произвольно; они системно взаимосвязаны, имеют определенную структуру отношений, так что одни элементы языка находятся в функциональной зависимости от других. Мы обычно не подозреваем, что значительная часть функциональных зависимостей в языке дис-

кретна и двузначна и что поэтому многие «правила» грамматики можно описать с помощью правил алгебры логики, алгебры Буля. Иначе говоря, можно представить двоичную дискретную модель структуры отношений элементов языка. Строго в рамках Булевой алгебры удастся, например, описать наиболее важные звуковые закономерности в тюркских языках. Чтобы показать, что это так, рассмотрим правила чередования гласных в словах киргизского языка. Киргизский язык выбран среди тюркских потому, что в нем эти правила, при всей их строгости, не столь просты, как в других тюркских языках, и процесс выявления их будет интереснее. (Мы, оказывается, уже настолько вооружены методами дискретной математики, что ищем задачу не попроще, а потрудней!)

Закономерность, которую нам предстоит описать, в общих чертах заключается в следующем. В любом киргизском слове гласный звук последующего слога зависит определенным образом от того, каков гласный звук предшествующего слога. Если добавляется еще один слог, то его гласный, по тем же правилам, определяется характером предшествующего и т. д. Таких правил зависимости всего два, и о каждом слоге известно, по какому из этих двух правил он подчиняет звучание своего гласного звучанию гласного предшествующего слога.

В соответствии с этим слоги делятся на два типа. В приводимой здесь таблице показано, какими должны быть гласные последующих слогов, в слогах каждого из двух типов, в зависимости от предшествующего гласного звука. Из таблицы видно, что в киргизском языке 8 гласных; из них только двух нет в русском языке: Ы — мягкое, У и О — мягкое О (мягкость, подобная немецкому умлауту).

Если в таком виде рассматривать эту таблицу, то правила следования гласных в киргизском слове мы сформулировать не сможем, и нам останется просто вы зубрить все эти чередования, если мы захотим выучить киргизский язык.

Гласный предшествующего слога	Гласный последующего слога	
	1-й тип слога	2-й тип слога
У	Ы	О
О	У	О
И	И	Е
Е	И	Е
У	У	А
О	У	О
Ы	Ы	А
А	Ы	А

Любое правило можно считать правилом лишь при условии, что оно относится не к единичному факту, а к определенным классам объектов и ситуаций. Поэтому сначала расклассифицируем наши объекты — гласные звуки киргизского языка. Даже без специальных знаний фонетики легко убедиться, что гласные различаются вполне закономерно. Так, все гласные Ы, У, Ө, О произносятся с вытянутыми губами (обозначим этот факт как $G = 1$), а гласные И, Ы, О, А не требуют вытягивания губ (следовательно, для них $G = 0$). Гласные И, Е, У, Ө произносятся так, что язык специально продвинут вперед, к передним зубам, и поэтому звучат мягко (обозначим этот факт как $M = 1$), а гласные Ы, А, У, О не требуют продвижения языка вперед и не создают впечатления мягкости (следовательно, для них $M = 0$). При произнесении гласных У, Ы, Ы, И язык поднимается вверх, к нёбу (имеет «высокий подъем», что мы обозначим как $P = 1$), а гласные О, А, Ө, Е такого подъема языка не требуют (поэтому для них $P = 0$). Следовательно, гласные киргизского языка могут быть охарактеризованы перечнем значений трех логических аргументов: M (мягкость), G (губность) и P (подъем). Эти аргументы обычно называют признаками гласных.

После этого уточнения мы можем переписать таблицу зависимости гласных последующего слога от гласного предшествующего слога в киргизском слове, дополнив эту таблицу перечнем значений его признаков: M, G, P . Признаки гласных слогов первого типа будем помечать цифрой 1 (например, M_1), а гласных слогов второго типа — цифрой 2 (например, M_2).

Гласный предшествующего слога				Гласный последующего слога							
				1-й тип слога				2-й тип слога			
				признаки			буква	признаки			буква
буква	М Г П			М ₁	Г ₁	П ₁		М ₂	Г ₂	П ₂	
Ы	1	1	1	Ы	1	1	1	Ө	1	1	0
Ө	1	1	0	Ы	1	1	1	О	1	1	0
И	1	0	1	И	1	0	1	Е	1	0	0
Е	1	0	0	И	1	0	1	Е	1	0	0
У	0	1	1	У	0	1	1	А	0	0	0
О	0	1	0	У	0	1	1	О	0	1	0
Ы	0	0	1	Ы	0	0	1	А	0	0	0
А	0	0	0	Ы	0	0	1	А	0	0	0

Гласных у нас 8, а признаков всего 3, и каждый из признаков принимает значение только 0 или 1. Поэтому сформулируем правила чередования гласных в киргизском слове как правила выбора значения каждого из признаков этого гласного в зависимости от комбинации признаков предшествую-

шего гласного. Таким образом, каждый из признаков гласного последующего слога мы можем рассматривать как логическую Булеву функцию трех переменных, а таблицу значений признаков чередующихся гласных как протокол наблюдений за черным ящиком. Черным ящиком является речевой аппарат. Изменения состояний внешних элементов черного ящика (положение языка и губ, чередования этих положений) мы наблюдаем непосредственно, а внутренние связи, обусловленные речевыми навыками, «записанными» в мозгу говорящего как двигательные команды и имеющие свою структуру, мы и должны выявить методами алгебры логики.

Итак, подобно тому как мы находили нормальную дизъюнктивную форму записи для импликации, найдем такую форму для каждого из признаков гласных последующего слога 1-го типа, потом 2-го.

$$M_1 = M\bar{G}P + M\bar{G}\bar{P} + M\bar{G}P + M\bar{G}\bar{P}.$$

Пользуясь «законами» алгебры логики, упростим эту формулу. Сначала, по правилу 12, вынесем за скобки общие члены: $M_1 = M\bar{G}(P + \bar{P}) + M\bar{G}(P + \bar{P})$. Вспомним, что на основании правила 10 в скобках получается 1, поэтому: $M_1 = M\bar{G} \cdot 1 + M\bar{G} \cdot 1$. Но по правилу 9, умножение на 1 не изменяет выражения. Поэтому $M_1 = M\bar{G} + M\bar{G}$. Снова выносим за скобки общие члены: $M_1 = M(\bar{G} + \bar{G})$, снова в скобках получаем $1 \cdot M_1 = M \cdot 1$. Следовательно, окончательно имеем: $M_1 = M$.

Иными словами, признак M_1 (мягкость) гласного последующего слога 1-го типа имеет те же значения, что и признак M гласного предшествующего слога. От других признаков предшествующего гласного M_1 не зависит.

Аналогично определим зависимость признака губности гласного последующего слога 1-го типа от комбинации признаков гласного предшествующего слога.

Нормальная дизъюнктивная форма: $G_1 = M\bar{G}P + M\bar{G}\bar{P} + \bar{M}GP + MGP$. Сокращаем эту формулу по тем же законам, что в предыдущем случае: $G_1 = M\bar{G}(P + \bar{P}) + M\bar{G}(P + \bar{P}) = M\bar{G} \cdot 1 + \bar{M}G \cdot 1 = M\bar{G} + \bar{M}G = G(M + \bar{M}) = G \cdot 1 = G$. Следовательно, $G_1 = G$. Таким образом, для слогов 1-го типа и второй признак полностью «копирует» значения соответствующего признака в предшествующем гласном и не зависит ни от каких других признаков этого гласного.

Определим значение третьего признака гласного в слогах 1-го типа как функции от значений признаков гласного предшествующего слога:

$$P_1 = M\bar{G}P + M\bar{G}\bar{P} + MGP + M\bar{G}\bar{P} + M\bar{G}\bar{P} + \bar{M}GP + \bar{M}GP + \bar{M}\bar{G}\bar{P} = M\bar{G}(P + \bar{P}) + M\bar{G}(P + \bar{P}) + \bar{M}G(P + \bar{P}) +$$

$$\begin{aligned} \bar{M}\bar{G}(\bar{P} + P) &= M\bar{G} \cdot 1 + M\bar{G} \cdot 1 + \bar{M}\bar{G} \cdot 1 + \bar{M}\bar{G} \cdot 1 = M\bar{G} + \\ &+ M\bar{G} + \bar{M}\bar{G} + \bar{M}\bar{G} = M(\bar{G} + \bar{G}) + \bar{M}(\bar{G} + \bar{G}) = M \cdot 1 + \\ &+ M \cdot 1 = M + M = 1. \end{aligned}$$

Иначе говоря, $P_1 = 1$. Получили постоянную величину, следовательно, P_1 вообще не изменятся и не зависят от значений переменных гласного предшествующего слога.

Мы, собственно, лишь для упражнений на использование правил алгебры логики таким длинным путем получили выражения для M_1 , G_1 и P_1 . Достаточно взглянуть внимательно на таблицу, чтобы заметить, что все значения как M_1 , так и G_1 полностью повторяют значения M и G соответственно, а поскольку в графе P_1 стоят лишь 1, то это — постоянная величина, не зависящая от признаков предшествующего гласного. Легко проверить по таблице, что для гласных в слогах 2-го типа $M_2 = M_1 = M$, а значение P_2 также является независимым, но равно не 1, а 0. Однако для определения зависимости G_2 от признаков предшествующего гласного расчеты не столь тривиальны, и только что проделанные упражнения окажутся серьезно полезными.

Нормальная дизъюнктивная форма для G_2 на основании нашей таблицы, примет вид: $G_2 = MGP + MG\bar{P} + \bar{M}G\bar{P} = M\bar{G}(\bar{P} + P) + \bar{M}G\bar{P} = M\bar{G} \cdot 1 + \bar{M}G\bar{P} = M\bar{G} + \bar{M}G\bar{P} = G(M + \bar{M}\bar{P})$. Формула существенно упростилась, но это упрощение можно продолжить, если вспомнить правило 13, по которому логическое слагаемое можно прибавить к каждому из логических сомножителей и получившиеся суммы перемножить. Тогда получим: $G_2 = G(M + \bar{M}) \cdot (M + \bar{P})$. Первая скобка снова обращается в 1, и, следовательно, $G_2 = G(M + \bar{P})$. Такова одна из простых формул зависимости гласности гласного в слогах 2-го типа от признаков гласного предшествующего слога. В данном случае G_2 зависит от всех трех признаков предшествующего гласного.

Выпишем полученные результаты. Для слогов 1-го типа: $M_1 = M$; $G_1 = G$; $P_1 = 1$. Для 2-го типа: $M_2 = M$, $G_2 = G(M + \bar{P})$; $P_2 = 0$.

Признаки гласного можно назвать его координатами. Тогда у гласного последующего слога 1-го типа, обозначенного в общем виде как C_1 , будут следующие координаты, определяемые координатами предшествующего слога: $C_1(M_1, G_1, P_1) = C_1(M, G, 1)$. Для слогов 2-го типа соответственно получим: $C_2 = [M, G(M + \bar{P}), 0]$. Подставляя конкретные значения координат предшествующего слога, мы по этим формулам можем легко получать полный перечень координат последующих слогов. Этот способ формулировки грамматических правил настолько однозначен и строг, что не представ-

ляет никакого труда составить для него программу и «научить» тем самым электронную машину моделировать те логические операции, которые производятся в голове говорящего, когда он пользуется языком.

Мы рассмотрели только очень простой пример применения математической логики в современной лингвистике. На самом же деле в настоящее время методами математической логики исследуются очень важные проблемы как прикладного, так и теоретического языкознания, среди которых проблема машинного перевода, например, лишь одна из многих.

Примеры собственно логических задач

Мы уже неоднократно подчеркивали, что моделирование процесса мышления методами математической логики — это лишь одно из ее приложений. Всякая система с дискретными отношениями способна стать объектом дискретного структурного моделирования. Однако пока у нас не было нетривиальных примеров применения методов математической логики к классически логическим задачам. Теперь убедимся, что уже в объеме алгебры логики мы можем проверить правильность таких цепочек высказываний, которые представляют собой основные простейшие процессы вывода нового знания из некоторого уже имеющегося знания. Такие цепочки, как известно, называются силлогизмами. Рассмотрим простой пример. Радиолюбитель рассуждает: «Если собрать телевизор по новой схеме, то его чувствительность возрастет в несколько раз; если чувствительность телевизионного приемника повышается, то качество изображения при приеме дальних станций становится лучше; товарищ уже собрал телевизор по новой схеме; следовательно, качество изображения при приеме дальних станций у товарища стало лучше».

Несложно проследить, что вывод, сделанный радиолюбителем, верен. Но посмотрим, как проверить такой силлогизм методами алгебры логики, чтобы убедиться, что и в неочевидных случаях математическая логика также способна ответить, правильно ли проведено рассуждение.

Введем условные знаки для логических переменных: H — новая схема телевизора, $Ч$ — чувствительность, K — качество изображения. Из наличия новой схемы следует повышение чувствительности, но не наоборот, так как чувствительность может быть достигнута и другими средствами (например, изменением антенны). Следовательно, между H и $Ч$ отношение импликации: $H \rightarrow Ч$.

Высокое качество изображения зависит от чувствительности телевизионного приемника, но не только от чувствительности. Качество может улучшиться, например, и за счет увеличения мощности телецентра. Следовательно, и между $Ч$ и K — отношение импликации: $Ч \rightarrow K$.

Итак, что известно радиолюбителю? Во-первых, что $(H \rightarrow C) \cdot (C \rightarrow K)$. Кроме того, известно, что уже имеет место новая схема, т. е. условия таковы: $(H \rightarrow C) \cdot (C \rightarrow K) \cdot H$. Из всего этого делается вывод, что качество изображения телевизора у товарища высокое, т. е. $(H \rightarrow C) \cdot (C \rightarrow K) \cdot H \rightarrow K$. Если эта сложная цепочка, эквивалентная сложному высказыванию, истинна, то значение ее истинности равно 1.

Проверим, так ли это, используя правила алгебры логики для упрощения исходного выражения. Чтобы ускорить этот процесс, используем уже полученный ранее результат по упрощению импликации (на основании этого упрощения была построена схема на рис. 11): $B \rightarrow H = \bar{B} + H$. Следовательно, для исходной цепочки, которую обозначим буквой A , имеем:

$$A = (H \rightarrow C) \cdot (C \rightarrow K) \cdot H \rightarrow K = (\bar{H} + C) \cdot (\bar{C} + K) \cdot H + K.$$

По правилу 14 «разрываем» знак отрицания, заменяя операцию логического произведения операцией суммы:

$A = (\bar{H} + C) + (\bar{C} + K) + \bar{H} + K$. Теперь по правилу 15, «разрывая» знак отрицания над суммами, превратим их в произведение отрицаний:

$A = \bar{H} \cdot \bar{C} + \bar{C} \cdot \bar{K} + \bar{H} + K$. Но знак двойного отрицания, по правилу 1, есть подтверждение. Поэтому: $A = H \cdot C + C \cdot K + \bar{H} + K$. Внесем, по правилу 13, слагаемые \bar{H} и K в произведение, где есть такие же переменные: $A = (H + \bar{H}) (\bar{C} + K) + (C + K) (\bar{K} + K)$. Скобки с однородными переменными, по правилу 6, превращаются в 1, а умножение на 1, по правилу 9, не изменяет произведения, следовательно:

$$A = \bar{C} + \bar{H} + C + K.$$

Теперь, по правилу 3, переставим второй член суммы с третьим:

$$A = \bar{C} + C + \bar{H} + K.$$

Два первых слагаемых, как мы знаем по правилу 10, в сумме равны 1, следовательно, $A = 1 + \bar{H} + K$. Но тогда и вся сумма, по правилу 6, равна 1. Итак, окончательно:

$$A = 1 + \bar{H} + K = 1.$$

Таким образом, чисто формально проверено, что то заключение, которое сделал радиолюбитель в нашем примере, действительно правильно.

Но, рассматривая конкретный пример, мы, по существу, доказали, что вообще подобная цепочка рассуждений, подобный силлогизм всегда правилен, какие бы конкретные пред-

ложения ни стояли на месте логических переменных в формуле этого силлогизма.

Как мы уже убедились при анализе свойств импликации, в подобные формулы могут даже входить внешне (но именно внешне) не связанные по смыслу высказывания.

Однако так как математическая логика дает общие приемы решения, то эти «парадоксальные» импликации и силлогизмы означают лишь следующее: если кто-нибудь в своем сознании считает связанными в действительности не связанные вещи, либо исследует очень частные специфические связи (скажем, связь по рифме, как в одном из наших примеров), то, исходя из этих связей и не отступая в своих рассуждениях от законов моделирования дискретных систем, он придет к совершенно истинным выводам... Но истинны они будут только для тех людей, которые разделяют исходные заблуждения или же для которых частные типы связей также существенны. Для тех же, кто заблуждений не разделяет, в первом случае будет ясно: логические сооружения строить умеет, только жаль, что кирпичики у него недоброкачественные. Во втором случае может вызвать недоумение выбор критериев существенности. Однако при любых обстоятельствах оценка самой логики в рассуждениях человека все равно будет положительной и не содержащей ничего парадоксального.

И еще один важный момент. Откуда же берется новое знание при логическом рассуждении, если в исходном знании его не было? Оно берется оттуда же, откуда выявляется внутренняя схема черного ящика, хотя крышка его не открывалась: по комбинациям элементов возбуждаемых (это могут быть и нейроны мозга) и элементов, проявляющих реакцию на эти возбуждения, восстанавливается скрытая, но существующая связь между этими двумя типами элементов. Таким образом, новые знания, полученные на основе логических рассуждений, — это именно знания о неочевидной, но уже существующей в голове структуре между понятиями, фактами, представлениями. Чем логичнее человек мыслит, чем выше его способность анализировать очень сложные структуры, тем больше он знает, хотя пользуется теми же исходными сведениями, что и остальные люди. Однако абсолютно новое знание, не заложенное в старом и не существующее в головах других, владеющих этими же исходными данными, на основе одной логики человек получить не может. Истинно новые знания получает он только из окружающей действительности (пусть и через других людей). Есть закон сохранения энергии и невозможности вечного двигателя, аналогично есть закон сохранения информации и невозможности ее получения непосредственно из мозга.

ЛОГИКА И МАТЕМАТИКА

СУЩНОСТЬ НЕКОТОРЫХ РАЗДЕЛОВ МАТЕМАТИКИ

Взгляд на математику как на науку о структурном моделировании изучаемых сложных объектов позволяет увидеть достаточно ясно связь и различия между отдельными отраслями математики и отношение этих отраслей к математической логике. Для примера мы остановимся на сущности некоторых из разделов математики.

Теория множеств

Теория множеств — один из наиболее близких к математической логике разделов математики. В частности, рассмотренная нами алгебра Буля полностью интерпретируется в терминах «множеств» и их отношений. Можно сказать даже, что теория множеств — это просто один из этапов очевидно-го обобщения математической логики. В этом нетрудно убедиться. Записывая формулы алгебры логики, мы прочитывали их как краткую формулировку следующей ситуации: если такой-то перечень условий имеет место, то результат тоже имеет место. Но эту же запись можно прочитать иначе: из всего множества фактов наличия таких-то и таких-то условий те факты, которые соответствуют заданным комбинациям условий, приводят к таким-то результатам; следовательно, и факты наличия результатов тоже образуют определенное множество, связанное с множеством воздействий.

Например, если мы имеем дело с черным ящиком, внутренняя схема которого соответствует операции логического произведения, то множество желаемых результатов (например, загораний лампочки) явится «подмножеством», получающимся в результате взаимодействия множеств исходных условий (нажатий на верхнюю и нижнюю кнопки). Графически такие отношения между множествами принято изображать в виде пересекающихся кругов в прямоугольнике: точки прямоугольника — это «универсальное множество», т. е. в нашем случае множество фактов любых нажиманий на любое место черного ящика. Круг B — множество фактов нажатия на верхнюю кнопку, круг H — на нижнюю. Тогда подмножество фактов зажигания лампочки (подмножество L) — это те точки, которые входят и в B и в H , т. е. находятся в месте перекрытия, пересечения кругов B и H (рис. 12,а).

Легко понять, что логическая сумма представится на рис. 12, б, где подмножество результата L входит или в B , или в H , или в область, принадлежащую им обоим (это подмножество результата зачернено).

Отношение антиэквивалентности изображено на рис. 12, в. На нем мы видим область результата, где есть только B , но нет H , или есть только H , но нет B .

Отношение импликации дает область результата везде, кроме случая, когда B есть, а H нет (рис. 12, г).

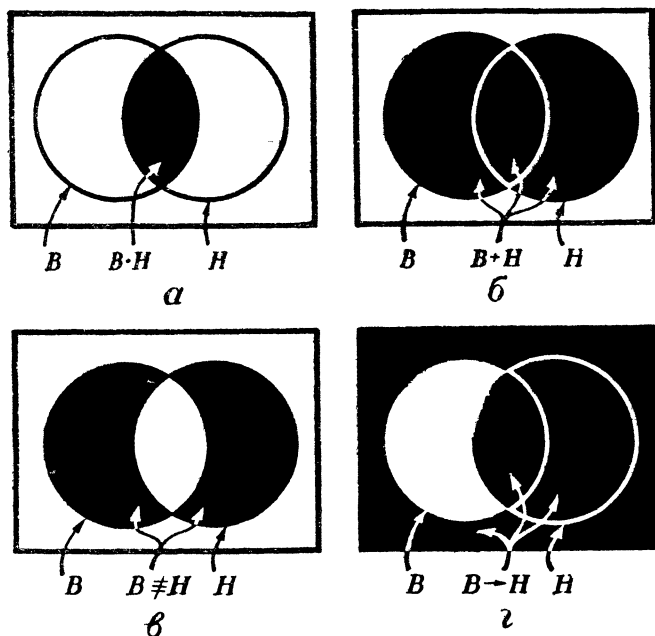


Рис. 12. Отношения между множествами, соответствующие операции: а — логического произведения ($L = B \cdot H$); б — логической суммы ($L = B + H$); в — логической операции антиэквивалентности ($L = B \neq H$); г — логической операции импликации ($L = B \rightarrow H$).

Подобным образом можно интерпретировать все 16 типов парных логических отношений, существующих в алгебре Буля. Кроме того, и такие разделы математической логики, как теория предикатов, выходящая за пределы нашей «Азбуки», но полностью включающая в себя аппарат Булевой алгебры, также одновременно является разделом теории множеств. Правда, если классическая математическая логика тяготеет к интерпретации своих функций в форме истинностных высказываний и нередко называется теорией высказываний или теорией предложений, то классическая теория множеств подразумевает под элементами множества в первую очередь различные числа, а под отношениями между множествами — отношения между классами чисел. Однако в настоящее вре-

мя эти исторически сложившиеся, но в принципе довольно случайные границы между теорией множеств и математической логикой стираются. Например, после того как теория множеств стала использоваться для описания лингвистических объектов, в качестве элементов множеств фигурируют уже не числа или классы чисел, а слова, синтаксические конструкции, предложения и их классы, типы высказываний, т. е. именно те объекты, которые так характерны для классической математической логики.

Такое стирание границ нас не должно удивлять, так как мы рассматриваем математическую логику лишь как раздел математики, моделирующий в исследуемых объектах отношения между дискретными элементами. А поскольку и при классификации чисел, и при классификации слов и предложений в языке, и при анализе цепочки рассуждений, и при конструировании релейной схемы в телефонии мы имеем дело со сложными объектами, дискретные элементы которых находятся в дискретных отношениях, образуют дискретные структуры, то для структурного моделирования этих объектов могут использоваться одни и те же конструкции.

Например, когда несущественно отражать наличие отношений между совокупностью объектов, то конструктом для моделирования такой ситуации служит понятие множества.

Теория графов

Итак, использование одного и того же конструкта, одного и того же принципа моделирования для отражения структурных особенностей самых различных, качественно не похожих сложных объектов, сложных систем, должно рассматриваться как многообразие областей применения, многообразие интерпретаций одного и того же раздела математики.

Но если мы имеем специфику в способе моделирования, то, применяя различные конструкты даже к одному и тому же объекту, мы должны считать, что имеем дело с различными разделами математики. Теория графов и математическая логика соотносятся между собой прежде всего как два способа, два принципа моделирования структуры практически одних и тех же сложных объектов: систем с конечным числом элементов, связанных между собой дискретными связями. Специфика конструктов, используемых в теории графов, заключается в том, что структура исследуемых систем представляется в ней в виде так называемых графов — нарисованных на плоскости схем, точки которых изображают элементы системы, а линии, соединяющие эти точки, — связи или отношения между элементами. Элементы, как правило, рассматриваются на нулевом ярусе, т. е. либо присутствуют (изобра-

жаются), либо отсутствуют (стираются с чертежа), тогда как, рассматривая основные логические отношения, мы чаще всего предполагали, что элементы не исчезают, а лишь изменяют свое состояние, т. е. считали их объектами ненулевого яруса. В то же время, наоборот, в логических примерах мы не акцентировали внимания на вопросе о том, направлено отношение от элемента A к B или от B к A , или оно возможно в обе стороны, тогда как при построении графов эта особенность связей в моделируемых системах рассматривается как одна из важнейших. Однако все эти особенности не принципиальны, при необходимости они могут переводиться, при помощи определенных правил, с символики математической логики на символику графов и наоборот. Но есть ряд задач, специфичных только для теории графов. Например, задача выбора такого способа проведения линий связей между элементами на графе (называемыми вершинами графа), при котором число точек пересечения этих линий было бы минимальным.

На первый взгляд может показаться, что подобная задача хороша как головоломка, но практически является примером схоластики сугубо теоретической дисциплины. Это явное заблуждение. Чтобы убедиться в этом, вспомним наш разговор о соответствии модели «духу» оригинала. Одну и ту же структурную модель можно использовать для отражения структурных особенностей самых различных систем. Но максимальная польза от такого моделирования будет лишь в том случае, когда существует соответствие способа моделирования природе моделируемого объекта.

Графы представляют собой структурные модели, изображаемые на плоскости. Но существует немало сложных объектов, связи и отношения между которыми также ограничены одной плоскостью. Например, дорожные связи между населенными пунктами, мосты между островами и т. п. И вот тут чисто «схоластические» задачи теории графов превращаются в жизненно важные задачи человеческой практики. Например, бывает нежелательно иметь пересечения шоссейных дорог вне населенных пунктов. Еще менее желательны такие пересечения для железнодорожных путей. А совсем недавно, не более 15 лет назад, в промышленной электронике теоремы теории графов стали абсолютно необходимыми при разработке так называемых печатных радиосхем. Электрические соединения между элементами этих схем, т. е. между радиодеталями, делаются в виде электропроводящих полосок, нанесенных на поверхность изолятора, к которому прикреплены радиодетали. Совершенно очевидно, что пересечение этих линий соединения абсолютно недопустимо, так как приведет к электрическим замыканиям в схеме прибора. Таким образом, когда специфика используемой структурной модели макси-

мально соответствует природе оригинала, оказывается возможным отразить и исследовать на модели максимум свойств оригинала и тем самым глубже изучить его сущность.

Однако ясно, что и в тех случаях, когда отношения между элементами сложного объекта не имеют ничего общего со связью элементов в границах единой плоскости, представление структуры объекта в образе графов может быть очень полезным. Например, оно отличается несравненно большей наглядностью, чем цепочки символов алгебры логики. Поэтому в терминах теории графов решаются многие задачи «классической» математической логики, в связи с чем в теории графов существуют, например, такие понятия, как «Булев квадрат», «Булев куб» и т. д.

Достаточно очевидно, что использование методов дискретного моделирования в любой конкретной научной области предполагает знакомство и с основами теории графов.

Теория чисел

Теория чисел — один из разделов структурного моделирования объектов, в котором чисто дискретное моделирование занимает большое место.

Поэтому желательно выявить точки соприкосновения теории чисел с математической логикой.

Сначала зададим себе такой общий вопрос: какой тип отношений, среди самых разнообразных типов отношений между элементами сложных объектов реальной действительности, наиболее универсален, наиболее часто встречается и наиболее часто интересует нас на практике? Таким отношением является отношение соседствования. Например, соседствование чисто пространственное: стул стоит возле стола, одно дерево растет возле другого, два человека идут рядом и т. д. Совершенно ясно, что группа более тесно соседствующих элементов выделяется как некоторое, хотя бы временное и малоустойчивое единство, т. е. представляет собой сложный объект, систему. В ней уже проявляются определенные отношения между элементами, т. е. структура. Для описания структурных свойств таких систем нужна структурная модель — конструкт. Самой элементарной, самой грубой структурной характеристикой подобных систем является оценка ее «объема», «дискретного размера» — без детализации конкретной сети отношений между элементами системы. Наиболее простым методом такой оценки служит перестановка элементов системы таким образом, чтобы вместо любого соседствования эти элементы находились в последовательном соседствовании, т. е. были как бы выстроены один за другим. Такой тип отношений называется следованием. Совершенно ясно, что для моделирования отношения следования можно воспользовать-

ся любым сложным объектом, элементы которого следуют друг за другом в пространстве или во времени.

Примером пространственной физической модели для отражения отношения следования могут служить пальцы на руке, бусинки на нитке, разложенные в ряд спички или камушки. Но это могут быть и вызубренные наизусть в определенном порядке звуковые сигналы, например обычные или специальные слова. Вот такой последовательной цепочкой специальных слов и являются звуковые знаки «один, два, три, четыре» и т. д. На письме эти сложные знаки заменяются упрощенными графическими знаками, называемыми цифрами 1, 2, 3, 4 и т. д., но сущность модели от этого не меняется. Когда мы встречаемся с любым реальным или воображаемым сложным объектом, для которого в конкретном случае достаточно указать лишь такую грубую структурную характеристику, как факт соседствования его элементов по пространственному или любому другому интересующему нас признаку, то мы прибегаем к нашей модели следования. Мысленно или фактически мы сопоставляем элементы описываемого сложного объекта с элементами нашей модели, в порядке их следования. Когда все элементы описываемого объекта сопоставлены взаимно однозначным образом с элементами модели, то имя последнего элемента модели, например слово «пять», служит грубой характеристикой структуры оригинала: мы говорим, что в этом оригинале, в этом сложном объекте, пять элементов. Такая процедура простейшего структурного моделирования сложных объектов и представляет собой сущность процесса счета.

Структурная модель, элементы которой находятся в отношении следования, а каждый элемент имеет свое собственное имя, представляет собой важнейшее понятие математики — натуральный ряд чисел. Это — еще один конструкт математики.

Теория чисел, как абстрактная дисциплина, сосредоточивает все свое внимание на самой структурной модели отношения следования, на натуральном ряде чисел. Если представить себе, что эта модель воплощена физически в нить с нанизанными на нее бусинками, то можно сказать, что специалист по теории чисел занят исключительно изучением свойств такого ожерелья, установлением того, какие структуры можно образовывать из него, если длина ожерелья может быть любой. Например, если задана определенная длина ожерелья (т. е. количество бусинок), то можно ли его сложить такими звеньями, чтобы в каждом было, скажем, по пять бусинок (т. е. как сформулировать правило делимости на 5). Каждая из таких длин (т. е. каждое число) может быть охарактеризована тем, какие структуры, выраженные в количественных же терминах, из нее можно построить. Таким образом выявляются классы

чисел и отношения между этими классами. Наиболее известные классы чисел — четные и нечетные, т. е. способные разбиваться на звенья по две «бусинки» и не способные. Если образовывать звенья по три бусинки, то некоторые длины ожерелий не будут иметь остатка, а те, которые его имеют, в свою очередь распадутся на два класса: те, у которых в остатке 2, и те, у которых в остатке 1. Все числа, имеющие одинаковые остатки при делении на определенное число, называются сравнимыми по модулю, равному этому числу. Например, все нечетные числа сравнимы между собой по модулю 2. Теория сравнений — один из важных разделов теории чисел, позволяет устанавливать отношения между классами чисел, и поэтому теория чисел органически переплетается как с теорией множеств, так и, следовательно, с математической логикой.

Но в то же время теория чисел, не ограничиваясь структурами из конечного числа элементов, допускает расчленение каждой «бусинки» на более мелкие доли и т. п., и поэтому структуры, рассматриваемые с помощью «ожерелья» из натурального ряда чисел, моделируют свойства таких систем, которые не могут моделироваться средствами математической логики. Анализ таких структур входит в компетенцию количественной математики, однако сама теория чисел демонстрирует тот факт, что нет никакой принципиальной резкой границы между математической логикой и математикой количественных отношений.

Некоторые аспекты теории информации и семиотики

Ни теория информации, ни семиотика как наука о знаках и их значениях не имеют прямого отношения ни к математике, ни к логике. Однако мы затронем некоторые важные проблемы, связанные с понятием знака и информации, так как для изложения сущности этих понятий удастся воспользоваться теми представлениями, которые лежат в основе наших определений сущности математической логики.

Сначала остановимся на таких вопросах, как кодирование, код, кодирующее устройство.

Предположим, что изменения состояния определенной системы (например, изменения структуры связей между ее элементами) приводят к тому, что состояния некоторых элементов другой системы тоже изменяются. Пусть эти элементы представляют собой «входы» черного ящика. Тогда мы можем считать, что входные элементы черного ящика испытывают воздействие. Если черный ящик имеет и выходные элементы, функционально связанные с входными, то воздействия на входные элементы приводят к изменению состояния выходных

элементов. Предположим, что внутренняя структура черного ящика такова, что каждой комбинации состояний входных элементов соответствует однозначно комбинация состояний выходных элементов, хотя внешне эти комбинации различны (например, представлены на различном количестве элементов). Составив протокол наблюдений за таким черным ящиком, мы сможем сформулировать закон связи между входными и выходными комбинациями состояний. Вот этот закон и представляет собой код черного ящика, если мы его используем как кодирующее устройство. Чередование входных комбинаций состояний — это входной кодируемый текст, поступающий на кодирующее устройство, а последовательность выходных комбинаций — это выходной, закодированный текст устройства или кодовая посылка.

Следовательно, кодируемый текст относится к кодовой посылке как структурный оригинал к структурной модели, как аргумент к функции, как операнд к образу, как воздействие к результату, как состояние входного элемента функциональной цепи к состоянию ее выходного элемента. Таким образом, все это многообразие терминов отражает одну и ту же сущность, рассматриваемую в различных аспектах. Точно так же код — это то же самое, что функциональная зависимость или оператор, или среднее звено функциональной цепи, или структура связи между состояниями элементов, испытывающих воздействие, и состояниями элементов, проявляющих результат, или внутренность черного ящика, или функтор.

Мы уже сказали, что состояния входных элементов черного ящика изменяются под воздействием изменения состояния некоторой системы (для нас пока неважно, естественным образом или с помощью разумного посредника достигается согласование между изменениями структуры системы и изменениями комбинаций состояний входа черного ящика). Следовательно, наблюдая кодовые посылки, мы можем иметь представление об изменениях в структуре исходной системы, если знаем код устройства. Поэтому выходной текст, т. е. кодовые посылки, — это тоже структурная модель исходной системы.

Мы можем сказать, что эта модель дает нам сведения о структуре системы, или, что то же самое, содержит информацию об этой системе. Что же такое тогда информация? Не существует пока исчерпывающих определений этого понятия. Но если пользоваться нашими терминами, то оно определится следующим образом: информация — это совокупность свойств некоторого объекта, моделирующая свойства определенного оригинала. Как мы отмечали, наиболее универсален способ моделирования свойств систем с помощью отражения их структуры на большем или меньшем числе ярусов. Поэтому обычно информацию понимают более узко: это со-

вокупность структурных свойств некоторого объекта, моделирующая определенные структурные свойства оригинала. Объект, определенные структурные характеристики которого моделируют структуру оригинала, служит при этом носителем информации. Соответствие между информацией и структурой оригинала может достигаться различным образом, в том числе и через целую цепь кодирующих устройств. Только если известны коды всех этих устройств, возможно выявить содержание информации, декодировать текст, т. е. восстановить ту форму структурной модели оригинала, которая наиболее близка структуре самого оригинала по степени соответствия между элементами и отношениями в оригинале и модели.

Определенный минимальный отрезок закодированного текста, который еще может быть сопоставлен после декодировки с конкретной структурной характеристикой оригинала (например, с элементом или отношением), наиболее естественно связать с понятием знака. Значением знака является та структурная характеристика оригинала, которую он моделирует. Следовательно, знак может не изменять своего значения, если он переводится в различную субстанцию.

Язык — это кодирующее устройство, оригиналом которого служит модель внешнего мира, представленная сознанием, а выход кодирующего устройства несет информацию в структуре произносимых звуковых знаков.

Таким образом, мы видим, что семиотика и теория инфорляции, как и математическая логика и математика вообще, — одно из проявлений искусственного или естественного (биологического) структурного моделирования систем, и поэтому не удивительно, что все эти науки постоянно находят различные точки соприкосновения.

ПОЧЕМУ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЛОГИКУ НАЗЫВАЮТ ЛОГИКОЙ

Существующие взгляды на сущность математики и математической логики

Теперь остановимся на том, почему математическая логика, применимая отнюдь не только к анализу высказываний и изучающая, таким образом, чаще всего (особенно в последнее время) не законы мышления, а самые разнообразные сети взаимодействий и связей, называется тем не менее логикой? Кроме того, поскольку эта логика имеет эпитет «математическая», то поневоле необходимо разобраться и в том, каковы взаимоотношения между логикой и математикой.

В нашей литературе математика обычно определяется как наука о количественных соотношениях и пространственных формах объектов реального мира. При этом даже

сравнительно молодые отрасли математики, например, топология, тоже подводятся под это определение, так как утверждается, что в данном случае мы имеем дело с особыми формами пространственных отношений.

Однако в определении сущности математической или символической логики мнения ученых гораздо разнообразнее и нередко просто противоречат друг другу. Например, в одних случаях математическая логика определяется как более высокая ступень формальной логики, использующая символику, аналогичную математической и поэтому очень часто математическую логику называют символической. В других утверждается, что математическая логика предназначена исключительно для проверки полноты и непротиворечивости исходных положений математики и в этом смысле является разделом математики. Представители такого понимания с наибольшим основанием чаще и называют ее математической логикой. Некоторые же ученые считают вообще логику одной из наиболее общих наук, отраслью которой является математика.

После того, как математическая логика получила чисто техническое приложение, ее стали называть технической логикой, причем сам факт такого приложения даже для специалистов нередко представляется чем-то неожиданным, не принять который невозможно лишь потому, что он — факт. Иногда же этому факту дается такое надуманное объяснение: логика находит применение в технике потому, что и в технике используются те слова, которые используются в логике.

Совершенно очевидно, что при таком представлении о математической или символической логике научный работник или инженер, еще не убедившийся в ее пользе на практике, не может быть заранее уверен в целесообразности ее применения, и, следовательно, изучения. Особенно, если он придаст серьезное значение утверждению, постоянно подчеркиваемому в книгах по математической логике, что логические отношения принципиально, в силу полной их произвольности, не могут отражать причинно-следственные связи между явлениями, тогда как сложные научные объекты и технические устройства — это прежде всего цепи протекающих во времени воздействий и реакций, цепи совершенно определенных причин и соответствующих им следствий.

Однако только что отмеченные недостатки логики являются следствием неправильного понимания сущности как логики, так и самой математики.

Более точная формулировка сущности математики дает возможность примирить перечисленные противоречия во взглядах на математическую логику, понять своеобразие исторического развития и взаимосвязей логики и математики и

благодаря этому выявить причины недоразумений, на начальном этапе мешающих оценке того, насколько целесообразно все более широкое внедрение логики в научную и техническую практику.

Математическая логика как естественный и необходимый этап развития математики

Как же следует понимать сущность математики? В данной работе постоянно подчеркивалась мысль, что правильное рассмотрение математики как науки не только о количественных отношениях и пространственных формах объектов реального мира, но и вообще как науки о структурном моделировании объектов реального мира, если элементы этих объектов и отношения между элементами поддаются строгому определению (т. е. позволяют найти достаточно надежный индикатор для выявления элементов и отношений в исследуемых системах). С этой точки зрения «высшая математика» является безусловно математикой, однако не исчерпывает всех возможностей этой науки. В частности, математический анализ не рассматривает качественных дискретных отношений между объектами, хотя и такие отношения могут быть однозначно определены, строго сформулированы. Например, нередко вопрос о наличии или отсутствии заданного признака у объекта решается совершенно однозначно.

Если приведенное определение математики в основном верно, то из него следует, что на некотором этапе развития математики возможность расширения области ее применения на качественные дискретные отношения должна была стать очевидной; после этого могли появиться первые попытки усовершенствования формального аппарата математики, (т. е. техники структурного моделирования систем), с целью обеспечения его применимости для моделирования новых отношений. Действительно, такой этап наступил около 300 лет назад. Один из создателей математического анализа, интегрального и дифференциального исчисления — Г. В. Лейбниц первый понял однобокость, неполноту математики, если ее объектом являются только количественные отношения и пространственные формы. Он начал создавать новую методику исчисления, включающую рассмотрение и таких систем, элементы которых имеют структуру качественных строго формулируемых дискретных отношений. Лейбниц рассматривал, например, такие отношения, как симметричность, подобие, истинность, ложность и т. д., и разрабатывал такой символический язык для записи этих отношений, что «химеры, которые не понимает даже тот, кто их создает, не смогут быть записаны его знаками». Это по существу и было началом разработки математической (символической) логики как раздела дискрет-

ной математики, специализированного для изучения неколичественных и конечных (по числу возможных состояний элементов) отношений.

Однако Лейбниц слишком рано понял это. Современники не были еще подготовлены к восприятию гениальных идей Лейбница, и его работы были надолго забыты.

Лишь в середине прошлого века математик Джордж Буль снова нащупал неразработанность одной из сторон математики и, ликвидируя этот пробел, заложил основы математической логики в виде так называемой алгебры логики или алгебры Буля. Используя достижения математики, накопленные почти за 200 лет после работ Лейбница, Буль, естественно, придал математической логике более законченный и совершенный вид. Однако делал он это несравненно менее осознанно, чем Лейбниц, и исходил не из общего понимания сущности математики, а лишь из удивительной аналогии между теми цепочками символов, которые рассматриваются в алгебре, и теми последовательностями высказываний, которые исследуются в формальной логике Аристотеля. Создав алгебру логики, Буль пришел к выводу: причина отмеченной аналогии заключается в том, что количественная математика является частью логики. Ясно, что это была переоценка значения логики, хотя в какой-то мере она приводила к более широкому пониманию математики, чем просто как науки о количественных отношениях.

Какие же логические построения рассматривались в алгебре Буля? Это были лишь те высказывания, о которых можно было утверждать, что они либо истинны, либо ложны. Если же высказывание не могло быть отнесено ни к одному из этих взаимно исключающих видов, оно, как и в логике Аристотеля, просто не рассматривалось. Следовательно, из всех возможных высказываний отбирались только те, которые поддаются строгой дискретной качественной оценке с конечным числом «баллов» («истинно-ложно»).

Вскоре было обнаружено, что математическая логика в форме алгебры Буля имеет непосредственное прикладное значение при проверке правильности большого класса выводов из исходных посылок в различных и прежде всего математических теориях. В связи с этим дальнейшие усилия последователей Буля были направлены на то, чтобы усовершенствовать символическую логику как орудие анализа оснований математики, как средство проверки того, насколько непротиворечиво выбраны исходные определения математических понятий и насколько последовательно сделаны дальнейшие выводы из этих исходных определений и понятий. Потребностями анализа оснований математики и стимулировалось в течение многих десятилетий совершенствование символической логики. Вопрос же о ее соотношении с математикой вне этой

области применения не интересовал ученых, и символическая логика получила одно из наиболее распространенных своих названий — математическая логика.

Почему математическая логика тяготеет к собственно логике

Как же объяснить, что эта новая научная дисциплина ассоциируется с понятием логики, которое и фигурирует постоянно в ее названиях? На этот вопрос можно ответить, если исходить из представления о математике, как науке о моделировании структур объектов реального мира. Какие из простейших не количественных, строго определяемых дискретных отношений могут быть в первую очередь обнаружены? Ясно, что это двузначные отношения, позволяющие оценивать рассматриваемые объекты с точки зрения заданного качества по принципу «да — нет». Где можно обнаружить достаточно большое количество объектов подобного рода, чтобы рассматривать эти дискретные объекты во взаимосвязях, анализировать их структуру?

На первых порах наиболее доступными дискретными качественными объектами могли быть только высказывания в формальной логике Аристотеля, из которой уже заранее были исключены все предложения, на вопрос об истинности которых нельзя ответить ни да, ни нет. Именно этот самый подходящий источник дискретных объектов и обнаружил Буль, и поэтому новую науку он связал с именем логики. Поэтому же длительное время в новой «логике» рассматривались только парные дискретные отношения; при этом понятие «истинности — ложности» используется до сих пор как универсальное понятие символической логики, хотя нередко рассматриваемые объекты имеют такую природу, что применение к ним понятия истинности бессмысленно и используется лишь чисто условно. (Как мы видели, из буквализации понятия «истинности — ложности» возникают псевдопарадоксы логики).

Разработка формального аппарата символической логики могла протекать наиболее успешно лишь в том случае, если рассматриваемые логические построения содержали максимальную концентрацию высказываний, строго подчиняющихся критерию «истинности — ложности». В какой области знаний в этом отношении имеются наиболее благоприятные условия? Достаточно очевидно, что в математике, в ее высказываниях, определениях и системе доказательств символическая логика имела наиболее вероятную возможность найти и вскоре нашла такую область применения, где ее методы могли быть проверены максимально эффективно. Со своей стороны, сама математика того времени особенно сильно нуждалась в средствах анализа правильности своих построений; поэтому сим-

волическая логика уже перестала быть «чистой» наукой, она превратилась в важную прикладную, хотя и сугубо теоретическую, дисциплину.

Это сужение понимания задач и сущности математической логики еще больше закрепило за ней связь с понятием логики как науки о законах мышления, хотя ясно, что точнее ее можно было бы назвать математикой конечных дискретных качественных отношений, моделирующей структуры, или наукой о дискретном моделировании систем с конечным числом состояний. И сейчас символическую логику, как уже отмечалось, чаще всего определяют лишь как науку, изучающую основания математики. Но только исходя из более широкого понимания математической логики как науки о любых неколичественных, строго определенных конечных дискретных отношениях объектов реального мира, можно было бы предсказать ее применимость и к нелогическим объектам.

К сожалению, это было ясно только Лейбницу. Когда в 1910 г. профессор Петербургского университета физик П. Эрэнфест написал, что релейные схемы, имевшие в то время уже большое значение в технике связи, также одна из разновидностей объектов, в которых достаточно строго можно выделить два дискретных качественных состояния, и, следовательно, системы таких объектов можно описывать с помощью аппарата математической логики, то на это замечание никто не обратил внимания; и вообще оно было непонято и забыто. И лишь в 1938 г. американский инженер К. Е. Шеннон использовал на практике алгебру Буля для анализа и расчета релейных схем. Позже стало известно, что за два года до этого такой же метод описания релейных схем применил в СССР инженер В. И. Шестаков, в Японии — инженер Накашима.

Таким образом, когда в человеческой практике получили большое распространение и значение технические объекты, вступающие в дискретные отношения, то рано или поздно была обнаружена, хотя и не до конца понята, применимость математической логики для формального описания сложных целей, состоящих из этих объектов. Однако слишком узкое и буквальное понимание сущности математической логики до сих пор является причиной того, что даже специалисты, использующие ее в совершенно «нелогических» целях, сами удивлены тем фактом, что логика почему-то оказывается способной отражать взаимосвязи между элементами объектов (например, между узлами сложных электрических и электронных схем). Если же исходить из предложенного выше определения математики, то факт нематематического и нелогического использования логики как одного из ее разделов становится совершенно естественным. Очевидно при этом и то, что возможны и со временем будут все более необходимы

не только двузначные, но и многозначные логики, которые в настоящее время усиленно разрабатываются.

Однако не следует ли из того, что математическая логика как наука о дискретном структурном моделировании дискретных конечных систем, являясь по существу лишь разделом математики, призванной разрабатывать способы структурного моделирования максимально разнообразных систем, вообще поглощает логику, и собственно логика, т. е. наука о законах мышления, теряет свою самостоятельность? На этот вопрос следует ответить отрицательно. Объектом математической логики являются любые дискретные конечные системы, анализируемые с точки зрения их структуры. В этом смысле и структуры связей понятий в человеческом сознании тоже могут быть объектом математической логики, но лишь в качестве одного из объектов или одной из интерпретаций законов математической логики.

Каковы задачи собственно логики

Собственно же логика как наука о законах мышления — более конкретная наука. Ее единственный объект — человеческое сознание и мышление, и не только те его стороны, которые связаны с процессами вывода дискретных решений, но и те, которые объясняют процесс «вызревания» этих решений, всевозможные вероятностные и эвристические процессы. В этом смысле логика — это не только наука о дискретном моделировании действительности в мозгу человека. Это логика, о которой давно уже говорят, но которая так мало еще разработана — логика диалектическая. Она должна, конечно, использовать все средства, имеющиеся в распоряжении современной науки, и в первую очередь формальный аппарат математической «логики», поскольку в человеческой деятельности, когда нужно принять какое-либо определенное решение, человек старается воспользоваться максимально дискретной структурой связи между имеющимся и выводимым знанием. А поскольку, когда логика зародилась, такого математического аппарата в ее распоряжении еще не было, то логики для своих нужд вынуждены были начать его разрабатывать. Так стала развиваться формальная логика, обслуживая параллельно себя и подготавливая материал для самостоятельной отрасли математики. Причем это получалось естественно, так как понятие правильного мышления подразумевает не только правильность выводов из исходных посылок, но и правильность самих посылок; и аппарат формальной логики применялся не только к сознанию как модели действительности, но и непосредственно к самим системам действительности, хотя и косвенно, через их словесное выражение.

Таким образом, логика действительно является матерью математической логики. Это родство проявляется в том, что новый раздел математики продолжает носить имя своего родителя. Однако теперь уже недалеко время, когда границы между этими науками окончательно оформятся, а широкое использование дискретной конечной математики при решении чисто логических задач, связанных непосредственно с мышлением, не будет причиной диффузии логики в математику, как не превращается в математику современная контактно-релейная техника, которая до развития математической логики просто не была настоящей наукой.

О «ПРОИЗВОЛЬНОСТИ» ЛОГИЧЕСКИХ ОТНОШЕНИЙ

Объективные причины возникновения тезиса о произвольности логических отношений и исходных математических понятий

Как уже отмечалось, в книгах по математической логике постоянно подчеркивается, что основные понятия и определения этой науки выбраны совершенно произвольно. Для создания логических теорий нужно освободить «логику от цепей, в которых ее держит обычное мышление». Под влиянием подобных утверждений У. Росс Эшби, например, рассматривая конкретную логическую задачу в кибернетике, говорит о последней, что и она «не ограничена свойствами, обнаруживаемыми в земной материи, и не выводит свои законы из них».

Едва ли стоит доказывать, что научный сотрудник, работающий в области конкретных естественных или общественных наук, или инженер, привыкший видеть за любыми формальными выкладками технического расчета конкретные свойства и отношения физических устройств и узлов, не может не почувствовать протеста против науки, в которой все произвольно и не отражает законов реального мира. Поэтому «абсолютная» абстрактность символической логики — одно из серьезных препятствий для распространения математической логики за пределами математики и вычислительной техники.

Нетрудно заметить, что представление о произвольности аксиом логики есть не что иное, как распространение на логику подобного взгляда, сформулированного впервые для математических абстракций. Хорошо известно также, какой отпор этому взгляду дал в «Анти-Дюринге» Ф. Энгельс. Однако он, говоря об этом лишь как об одном из многочисленных вопросов, затрагиваемых в книге, по существу не объясняет всех причин возникновения такого взгляда. А эти причины весьма серьезны. Чтобы их понять, придется снова рассмот-

реть некоторые моменты в развитии математики и логики. Речь будет идти о том, как изменялись представления об истинности математических теорий.

Как известно, арифметика, геометрия, а позже алгебра явились обобщением тех приемов, которые были найдены людьми в практике счета и обмера физических объектов. На этой стадии единственным критерием правильности математического рассуждения или соотношения была его применимость к решению практических задач. Однако как только были выделены и условно обозначены определенными символами наиболее важные свойства и количественные взаимосвязи между физическими объектами, т. е. после того, как была построена структурная модель этих объектов, — уже из новых комбинаций конструкторов, из анализа модели, а не оригинала, чисто математически могли быть получены сведения о новых комбинациях свойств объектов; и лишь после этого обнаруживались сами реальные объекты с соответствующими комбинациями свойств. Таким образом, уже на ранней стадии развития математика имела определенную способность опережать человеческую практику, предсказывать наличие новых отношений объектов действительности. Так, до появления понятия начала координат было предсказано наличие отрицательных чисел, до появления векторного анализа было введено мнимое число и т. д. Пока практика не доказывала применимость новых математических понятий, они оставались мнимыми, чисто теоретическими, произвольными, иррациональными, трансцендентными.

Однако следует заметить, что здравый смысл математиков всегда заставлял их искать интерпретации новым математическим понятиям и теориям. И лишь в силу обстоятельств, когда математика настолько обогнала практику, что многие чисто физические интерпретации стали почти невозможными, математики вынуждены были удовлетвориться тем, что истолковывали, например, новые алгебраические отношения в образах геометрии, геометрические — в понятиях алгебры и т. п. Особенно богатым источником интерпретаций была теория множеств, теория чисел. Так как между числами возможно громадное количество различных типов отношений, то среди них нередко удается найти и такие, которые подобны отношениям, найденным новыми математическими теориями.

Однако в конце XIX — начале XX века и этот источник интерпретаций в основном истощился, особенно когда благодаря использованию математической логики основания математики были значительно уточнены, повысилась строгость математических доказательств и новые разделы математики начали развиваться еще более бурно. При этом отметим, что анализ оснований математики с помощью математической

логики требовал уверенности в непротиворечивости тех аксиом, на которых основана сама логика; в этом смысле четкой границы между логикой и математикой и их методами не оставалось, так что вопрос об истинности математических понятий был одновременно и вопросом об истинности аксиом логики.

Развитие теоретической математики без достаточно убедительных интерпретаций привело к тому, что часть математиков выдвинула своеобразный научный протест против такого положения. Эти математики отстаивали следующий взгляд: то, что представлено с помощью математических теорий, должно быть истинным, приемлемым, понятным хотя бы с точки зрения интуиции, иначе теория не имеет права на существование. Под влиянием критики со стороны «интуиционистов» еще тщательнее были проверены некоторые положения в обосновании математических теорий. В то же время отказаться от большого числа математических результатов только потому, что их никак не удавалось истолковать физически, большинство математиков не согласилось. Это, конечно, естественно, иначе понадобилось бы умышленно задерживать развитие теоретической математики. Однако как же можно доказать, что новые математические теории справедливы, если нет их интерпретации?

Именно в это время получила распространение концепция М. Паша, Г. Кантора и Д. Гильберта, считавших, что математика в принципе «свободна», она не нуждается ни в каких чувственных интерпретациях, «ее понятия связаны только требованиями быть непротиворечивыми и соответствовать понятиям, введенным ранее посредством точных определений», причем сами исходные понятия выбираются «совершенно произвольно». Все эти представления в равной мере относились и к логике, так что постоянно встречающиеся в книгах по математической логике утверждения о произвольности ее основных понятий есть не что иное, как отражение концепции Гильберта. Очевидно также, что если логические связи произвольны, то они не могут не противоречить причинно-следственным и другим объективным связям и отношениям элементов реального мира, отражающим законы природы.

Степень произвольности выбора исходных математических понятий

Как же отнестись к изложенной концепции?

Ведь она действительно дала для развития математики несравненно больше, чем точка зрения интуиционистов, доказала, что и без физической интерпретации математика и логика способны создавать новые теории и что действительно

новые теории нередко создавались именно за счет того, что их авторы брали в основу другую систему постулатов и аксиом. (Достаточно вспомнить геометрию Лобачевского.) Однако если последовательно стоять на этой точке зрения, то неясным становится обратное положение: почему многое в математике имеет все-таки физическую интерпретацию? Удивительно тогда и то, что с развитием науки и техники сугубо «произвольные» формальные теории вдруг оказываются приложимыми к новым объектам. Так, в частности, случилось с математической логикой. Или, например, почти все законы теории чисел оказались такими, что они точно соответствуют описанию работы систем, состоящих из многих пересчетных схем, и т. д.

Все это становится понятным, если учесть, что на самом деле произвольность в выборе аксиом при создании математических теорий мало чем отличается от произвольности диспетчера нажать ту или иную комбинацию кнопок во время формирования железнодорожных поездов: в конечном счете эта произвольность не выходит за рамки того, что задано физическим наличием определенного количества железнодорожных путей, на которые можно послать вагон или поезд. В математике в широком смысле это соответствует определенному набору найденных человечеством и отраженных (в исходных математических конструктах) свойств и отношений объектов материального мира. Поэтому любая математическая теория имеет единственную ценность: способность отражать те или иные (количественные и качественные) стороны действительности, предсказывать их существование. И в этом смысле представителям естественных и социальных наук или инженерам безусловно ближе всего точка зрения Лобачевского, Римана, Эрмита, которые не сомневались, что рано или поздно практика подтвердит правильность тех математических построений, которые пока что кажутся совершенно абстрактными.

Вредные последствия концепции произвольности

Так должно ли быть подвергнуто сомнению утверждение, что формулы математической логики совершенно условны и не отражают объективных связей и отношений? Несомненно. Это мнение об «условности» — печальное недоразумение, которое в настоящее время уже начало приносить чисто практический вред. Например, лингвисты, понявшие полезность использования точных методов в языкознании и освоившие необходимый логико-математический аппарат для описания дискретных отношений в структуре сложных лингвистических объектов, восприняли, вместе с плодотворными математическими идеями, и философские заблуждения.

У теоретиков структурализма мы находим уже известные нам утверждения, что теория «сама по себе не зависит от опыта» и является «чисто дедуктивной системой», и что «первый фактор», который ее характеризует — это «произвольность теории» (там же), (все как у математиков!), и что «с научной точки зрения вселенная состоит не из предметов или даже «материи», а только из функций, устанавливаемых между предметами, предметы же в свою очередь рассматриваются как точки пересечения функций» (это уже как у физиков, поверивших философам математики!). Таким образом, не понимая различия между системой, которой является язык, и ее структурной моделью (обеспечивающей максимум эффективности при исследовании этой системы), отождествив модель с оригиналом и приписав оригиналу те свойства, которые присущи модели лишь в силу ее принципиальной ограниченности при отражении особенностей оригинала, наиболее прямолинейные структуралисты в основу своего учения положили тезис: «язык есть форма, а не субстанция».

«Существенным для языковой единицы является не материал, из которого она построена, а исключительно множество противопоставлений, в которые она входит».

Сосредоточив все внимание на структуре отношений языковых единиц и абстрагировавшись от их субстанции, представители структурной лингвистики, безусловно, содействовали и содействуют прогрессу своей науки тем, что разрабатывают методы структурного моделирования лингвистических явлений и объектов, без чего, как мы уже говорили, невозможно объективное описание оригинала, уточнение и выявление многих закономерностей, зависящих от особенностей структуры рассматриваемых ярусов. Но без учета свойств субстанции структурная лингвистика, отождествляющая структуру с системой, принципиально неспособна увязать в единую системную картину и сведения о структуре различных ярусов, и динамику языка с его статикой. Не случайно наиболее последовательные структуралисты убеждены, что система может быть только статической, и поэтому истинным языкознанием считают лишь изучение статике языка. Выявляя структуру того или иного яруса, они не имеют возможности ответить, почему эта структура именно такова, поскольку предполагается, что «субстанция никак не определяет правил «лингвистической игры»; эти последние логически независимы от субстрата, в котором они реализуются».

На самом же деле, в такой системе, как язык, где непрерывно происходит стихийный «естественный отбор» языковых средств, т. е. процесс самоорганизации, на каждом ярусе вырабатывается оптимальное динамическое равновесие между субстантными возможностями и структурой, наиболее подхо-

дящей для этой субстанции, причем структура и субстанция каждого яруса влияет на все остальные ярусы.

Когда структурная лингвистика будет исходить не из отождествления, а из правильного противопоставления структуры и субстанции, когда она признает равновеликость обоих начал, т. е. структуры и субстанции в реальной системе, лишь тогда до конца проявится вся научная плодотворность структурного моделирования языковых явлений и объектов. Но тем самым структурная лингвистика прекратит свое существование, так как фактически превратится в системную лингвистику. И многие лингвисты, убежденные в том, что они являются последовательными структуралистами, уже пытаются внести в теорию структурной лингвистики такие «уточнения» и «поправки», которые ускоряют процесс становления новой, системной лингвистики.

Рассмотрим для примера еще одну науку, естественному развитию которой мешают заимствованные заблуждения относительно сущности математики, ее произвольности и независимости от реального мира. В настоящее время все острее чувствуется потребность в специалистах нового типа: универсалах, способных легко вникать в сущность сложных систем, воплощенных в самую различную субстанцию, или, наоборот, способных создавать сложные системы по заданным свойствам. Вот что говорит по этому поводу известный кибернетик У. Р. Эшби: «Здесь мы, очевидно, вторгаемся в пределы так называемой «общей теории систем», относительно которой мне всегда было неясно, имеет ли она дело с физическими системами, и поэтому связана условиями реального мира, или с математическими системами, единственное требование к которым заключается в их внутренней непротиворечивости».

В свете положений, изложенных в данной книге, совершенно ясно, что общая теория систем должна максимально использовать математику как средство структурного моделирования исследуемых систем на всех доступных ярусах. Ясно и то, что в основе общей теории систем, применимой к анализу систем различной субстанции, должна лежать методика выявления взаимодействия структуры с субстанцией в реальных системах. Лишь при этом структурное моделирование может быть наиболее эффективным. Однако У. Р. Эшби, находясь под влиянием идей, идущих от философов математики, приходит к выводу, что при создании общей теории систем «нужно исключить из рассмотрения два не относящихся к делу фактора. Первым из них является «материальность» — идея о том, что машина должна быть сделана из реальных материалов... Точно так же не относится к делу любая ссылка на энергию»...

Не имея правильного противопоставления системы ее структуре и структурной модели, Эшби, по существу, предла-

гает строить общую теорию систем как теорию исключительно структурную, не понимая, что при этом в лучшем случае будут разработаны некоторые новые разделы науки о структурном моделировании, т. е. математики, а общая теория систем так и не будет создана.

Не был бы прав и оппонент Эшби, который предложил бы в общей теории систем исследовать лишь вопросы воплощения различных сложных конструкций в реальную субстанцию, так как такое направление непременно выродилось бы в одну из инженерных дисциплин, наиболее близкую к технологии.

Общая теория систем должна, по-видимому, разрабатывать методику правильной оценки существенности тех или иных сторон во взаимосвязях элементов сложных реальных систем с учетом практических требований в конкретных ситуациях функционирования этих систем. Эта теория должна научить людей видеть как то общее, что есть в структурах систем различной субстанции, так и то общее, что определяется универсальными закономерностями взаимодействия структуры системы с ее субстанцией. Лишь при этом условии возможно правильное абстрагирование от того, что несущественно на уровне наблюдения за системой и что допускает идеализацию при замене рассмотрения системы анализом или синтезом ее структурной модели на уровне математических конструктов. При этом сами конструкты теряют свою таинственную математическую абстрактность, «не доступную обычному здравому смыслу», и благодаря этому становятся еще более могучим орудием познания такой сложной системы, какой является внешняя действительность во всех ее технических, биологических, космических, социальных проявлениях.

	ЛОГИЧЕСКИЕ „ВОЗДЕЙСТВИЯ“		ЛОГИЧЕСКИЕ „РЕЗУЛЬТАТЫ“ – В ; логические операции,					
Существующие способы алгебраической записи логического отношения аргументов с функцией	A	B	$B \equiv 0$	$B = A \vee B$ $B = A \cup B$	$B = A \neq B$ $B = A \neq B$	$B = \bar{A}$ $B = A'$ $B = \sim A$ $B = \neg A$ $B = A^c$	$B = A \Rightarrow B$ $B = A \supset B$ $B = A \supset B$ $B = A \setminus B$	$B = \bar{B}$ $B = B'$ $B = \sim B$ $B = \neg B$ $B = B^c$

двоичная форма записи связи воздействия с результатом	1 1 0	1 0 1 0	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 1 0	0 0 1 1	0 1 0 0	0 1 0 1
---	-------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------

двоичный № отношения			0	1	2	3	4	5
----------------------	--	--	---	---	---	---	---	---

истинностная формула отношения			ffff лллл	ffft ллли	fftf ллил	ftft ллии	ftff лилл	ftft лили
--------------------------------	--	--	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------

ОСНОВНЫЕ, ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ В ЛИТЕРАТУРЕ, НАЗВАНИЯ ЛОГИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ, ОПЕРАЦИИ (ФУНКТОРА)	Первое логич. воздействие. Первое логич. переменное. Первый логич. аргумент	Второе логич. воздействие. Второе логич. переменное. Второй логич. аргум.	Тождественный ноль. Тождественно ложно.	Операция пирса. Отриц. дизъюнкция. Обратн. дизъюнкция. Анти-дизъюнкция. Недизъюнкция. Обратн. логич. сумма. Гетеро-фазис. Отрицание комбинации. Анти-комбинация. Отриц. автономия. Анти-автономия. Отриц. констелляция. Анти-констел.	Отриц. обратной импликация. Обратн. импликация. Неимпликация. Обратн. раздельное суждение. Обратн. анти-совпадение.	Отриц. пераго аргумента. Инверсия первого переменного. Дополнение к первому переменному. Профазис.	Отриц. материальной импликации. Материальная антиимпликация. Неимпликация. Анти-совпадение. Раздельное суждение. Частно-огрицательное суждение. Отриц. селекции. Анти-секция. Анти-специфик. Анти-детер.	Отриц. второго аргумента. Инверсия второго переменного. Дополнение ко второму переменному. Обратн. антифазис.
	Условные краткие названия логической функции операции		ЛЮ-БОЕ ЛОЖ-НО	НИ НИ	НЕ НО	НЕ «А»	НО НЕ	НЕ «Б»

логические отношения, логические функции — $F. B = F(A, B)$

$B=A \neq B$ $B=A \neq B$ $B=A \neq B$ $B=A \neq B$ $B=A \neq B$ $B=A \neq B$ $B=A \neq B$	$B=A / B$ $B=A \wedge B$ $B=A \wedge B$ $B=A \wedge B$ $B=A \wedge B$ $B=A \wedge B$ $B=A \wedge B$	$B=A \& B$ $B=A \wedge B$ $B=A \wedge B$ $B=A \wedge B$ $B=A \wedge B$ $B=A \wedge B$ $B=A \wedge B$	$B=A \equiv B$ $B=A \sim B$ $B=A \neq B$ $B=A \neq B$ $B=A \neq B$ $B=A \neq B$ $B=A \neq B$	$B=B$ $B=A \supset B$ $B=A \supset B$ $B=A \supset B$ $B=A \supset B$ $B=A \supset B$ $B=A \supset B$	$B=A \rightarrow B$ $B=A \rightarrow B$ $B=A \rightarrow B$ $B=A \rightarrow B$ $B=A \rightarrow B$ $B=A \rightarrow B$ $B=A \rightarrow B$	$B=A$ $B=A \leftarrow B$ $B=A \leftarrow B$ $B=A \leftarrow B$ $B=A \leftarrow B$ $B=A \leftarrow B$ $B=A \leftarrow B$	$B=A \sim B$ $B=A \sim B$ $B=A \sim B$ $B=A \sim B$ $B=A \sim B$ $B=A \sim B$ $B=A \sim B$	$B=A \vee B$ $B=A \cup B$ $B=A \cup B$ $B=A \cup B$ $B=A \cup B$ $B=A \cup B$ $B=A \cup B$	$B=\bar{I}$ $B=A \oplus B$ $B=A \oplus B$ $B=A \oplus B$ $B=A \oplus B$ $B=A \oplus B$ $B=A \oplus B$
--	---	--	--	---	---	---	--	--	---

0 1 1 0	0 1 1 1	1 0 0 0	1 0 0 1	1 0 1 0	1 0 1 1	1 1 0 0	1 1 0 1	1 1 1 0	1 1 1 1
------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------

6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
---	---	---	---	----	----	----	----	----	----

fttf	fttt	tfff	tftt	tftf	tftt	tfff	tftt	tfff	tttt
лиил	лиии	иллл	илли	илил	илии	иилл	иили	ииил	иини

Отриц. равно- значно- сти. Антиэк- вивалент- ность. Неравно- знач- ность. Строгая дизъ- юнкция. Исключ- чающая дизъюнк- ция. Раздели- тельная дизъюнк- ция. Антисо- лидар- ность. Анти- компле- ментар- ность. Отриц. взаимоза- виси- мости. Анти- интерпен- денция.	Операц. Шеф- фера. Штрих Шеф- фера. Отриц. конъ- юнк- ции. Обратн. конъ- юнк- ция. Не- конъ- юнк- ция. Анги- конъ- юнкция. Обратн. логич. произв. совпаде- ние. Альтер- нативное от- рица- ние. Несов- мест- ность. Обще- отриц. сужде- ние.	Логич. произ- веден- ие. Конъ- юнк- ция. Совпа- дение. Пере- сече- ние. Соеди- нитель- ное сужде- ние. Част- ноут. верд. сужде- ние. Реали- зова- ние.	Равно- знач- ность. Экви- валент- ность. Истин- ный без- услов- ный союз. Материаль- ная эквива- лент- ность. Взаим- ность. Взаимо- зави- си- мость. Соли- дар- ность. Комп- лементар- ность. Интер- депен- денция.	Утвер- ждение второ- го аргу- мента. Повто- рение второ- го аргу- мента. Утвер- ждение второ- го пе- ремен- ного. Повто- рение второ- го пе- ремен- ного. Доми- нация второ- го пе- ремен- ного.	Импли- кация. Следо- вание Отриц. антисов- падение. Обратн. антиим- плика- ция. Отриц. обрат- ной им- плика- ции. Мате- риаль- ная им- плика- ция. Обще- утвер- дит. сужде- ние. Селек- ция. Спец- фика- ция. ДETER- мина- ция.	Утвер- ждение перво- го аргу- мента. Повто- рение перво- го аргу- мента. Утвер- ждение перво- го пе- ремен- ного. Повто- рение перво- го пе- ремен- ного. Доми- нация перво- го пе- ремен- ного.	Обрат- ная им- плика- ция. Обрат- ное сле- дование. Отриц. обратн. анти- совпаде- ния. Обрат- ная селек- ция. Обрат- ная спе- цифика- ция. Обрат- ная детер- мина- ция.	Дизъ- юнк- ция. Логич. сумма. Про- стая дизъ- юнк- ция. Объе- дине- ние. Сбор- ка. Абстра- гиро- вание. Комби- нация. Авто- номия. Кон- стел- ляция. Не- разде- литель- ная дизъ- юнк- ция.	Тож- дест- вен- ная еди- ница. Тож- дест- венно истин- но.
---	---	--	--	---	--	---	---	---	--

НЕ КАК; или или	НЕ или НЕ	и и, и	КАК; ЕСЛИ и ТОЛЬ- КО ЕСЛИ	КАК «Б»	ЕСЛИ ТО; НЕ или	КАК «А»	или НЕ	и/или; или; хотя бы	лю- бое ис- тин- ное
--------------------	-----------------	-----------	--	------------	--------------------	------------	-----------	------------------------------	----------------------------------

Каковы же перспективы использования дискретной конечной математики в различных областях инженерной и научно-исследовательской практики? Безусловно, самые широкие. Ведь цепочки символов в логических формулах позволяют не только записывать «названия» сложных объектов. Они дают возможность также отражать, как в результате взаимосвязи и пересечения элементов простейших типов возник этот сложный объект. А подобное образование сложных систем из определенных и закономерных комбинаций более простых — главнейшая особенность и неживой, и живой природы, и многих технических устройств, и знаковых систем, и языка.

Таким образом, «протоколируя» взаимосвязи между элементами изучаемых или конструируемых систем и переводя этот протокол в сжатую и точную запись отношений в виде логических формул, мы получаем возможность «заглянуть в черный ящик»; иначе говоря, мы можем в какой-то мере понять пути формирования систем со сложной структурой и этим либо ускорить процесс нахождения варианта структуры, сочетающего в себе оптимум простоты и «логической», и технической, либо проникнуть в сущность внутренних, недоступных прямому наблюдению взаимосвязей сложных объектов только на основании анализа структурной модели поведения объекта при различных внешних воздействиях.

Само собой разумеется, что логико-математические методы применимы тогда, когда еще не распутана сеть связей, но само наличие связей и взаимодействующих элементов уже проявляется. При выявлении же связей и элементов не всегда есть надежные индикаторы. Когда возможности этих индикаторов исчерпываются, приходится использовать другие методы, например статистические или просто интуитивные. Проблемы, требующие нематематического подхода, в любой науке тоже никогда не исчезнут, они вновь возникают с углублением наших знаний. Но когда взаимодействие между составными частями сложного объекта уже установлено, попытка анализировать его, структуру, опираясь только на расплывчатые словесные формулировки из-за неумения выразить их точным

языком математики, равносильна попытке доказать на практике, будто никакие современные виды транспорта ни в каких условиях не имеют преимуществ перед пешим передвижением.

Всякий исследователь или инженер, который владеет нужной математической техникой и к месту ею пользуется, обладает, при прочих равных условиях, несравненным преимуществом перед коллегой, работающим «по старинке». Но если количественную математику у нас учат в школе и более серьезно — в технических вузах, то конечная дискретная математика, во многом более универсальная и применимая в отраслях науки и техники, где количественная математика бессильна, пока что доступна лишь узкому кругу теоретиков и за последние годы — инженерам, работающим в области вычислительной техники. Основная же масса инженеров, научных работников и даже математиков имеет о ней довольно слабое представление и даже не подозревает, какую пользу может принести практическое внедрение ее методов во многие области. «Азбука математической логики» должна в какой-то мере привлечь внимание широких научно-технических кругов к этой интереснейшей дисциплине и помочь желающим приступить к глубокому и систематическому ее изучению по книгам, написанным в более строгом математическом стиле.

О ЧЕМ РАССКАЗЫВАЕТСЯ В ЭТОЙ КНИГЕ

	<i>Стр.</i>
ОБЩИЕ ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ	6
Характеристики сложных объектов	6
Дискретные системы и структуры, структурные методы в науке	13
Воздействие, результат, функция	22
ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ И ЗАКОНЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ.	30
Основные логические отношения	30
Системы счисления и номер логического отношения	43
Логическое отношение импликация («если... то»)	48
Основные «законы» алгебры логики	63
ЛОГИКА И МАТЕМАТИКА	78
Сущность некоторых разделов математики	78
Почему математическую логику называют логикой	86
О «произвольности» логических отношений	93

МЕЛЬНИКОВ Геннадий Прокопьевич
АЗБУКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Редактор И. Б. Шустова
Художественный редактор Е. Е. Соколов
Технический редактор А. С. Ковалевская
Корректор Г. П. Трибунская
Обложка С. А. Бычкова

А 02180. Сдано в набор 17.III 1967 г. Подписано к печати 24.V 1967 г.
Формат бум. 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 3. Бум. л. 3,25. Печ. л. 6,5.
Уч.-изд. л. 6,26. Тираж 80 000 экз. Издательство «Знание» Москва, Центр,
Новая пл., д. 3/4. Заказ 1011. Типография изд-ва «Знание». Москва, Центр,
Новая пл., д. 3/4. Цена 19 коп.

Тем, кто учит и учится,
кто хочет знать больше
кто идет
в ногу со временем.

Издательство «Знание» предлагает серию *«Народный университет», естественнонаучный факультет.*

В книгах естественнонаучного факультета популярно, занимательно и образно рассказывается об основных проблемах физики, астрономии, математики, химии, биологии, геологии, географии и смежных наук. Каждая книга — это круг знаний по данной теме.

Во 2-м полугодии 1967 года факультет выпустит следующие книги:

Владимиров С., Карев М. От межзвездного газа до центра сверхзвезд (давление в природе и технике).

Новое о жизни растений. Сборник.

Человек осваивает космос (физические основы космонавтики). Сборник.

На книги и брошюры естественнонаучного факультета можно подписаться как на газеты и журналы во всех отделениях связи.

В каталоге «Союзпечати» они помещены в разделе «Научно-популярная литература» под рубрикой «Брошюры издательства «Знание» — естественнонаучный факультет.